Über
orthogonale Invarianten der bizirkularen Kurven vierter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Otto Lüders
aus Elbeu (Kreis Wolmirstedt).

Halle a. S.
Buchdruckerei des Waisenhauses.
1910.

Referent: Prof. Dr. A. Gutzmer.

Meinen lieben Eltern.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544726_0100

Kapitel I.

Herleitung der orthogonalen Invarianten der bizirkularen Kurven vierter Ordnung.

§ 1.

Einleitung.

Unter einer orthogonalen Invariante einer algebraischen Kurve versteht man bekanntlich eine Funktion der Koeffizienten, die nach Ausführung der allgemeinen orthogonalen Transformation, d. h. nach Drehung und Verschiebung des rechtwinkligen Koordinatensystems, unverändert bleibt. Symbolisch kann man diese Definition folgendermaßen ausdrücken. Hat man die algebraische Gleichung:

$$f(a, b, c, d, \ldots . x, y) = 0,$$

und wird diese mit Hilfe der linearen Substitutionsgleichungen:

$$x = \quad x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + c_1,$$
$$y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + c_2$$

auf die Form gebracht

$$f_1(a', b', c', d', \ldots . x', y') = 0,$$

so heißt eine Funktion dieser Koeffizienten

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots .)$$

eine orthogonale Invariante, wenn die Gleichung statt hat:

$$\varphi(a, b, c, d, \ldots .) = \varphi(a', b', c', d', \ldots .).$$

Die orthogonalen Invarianten sind absolute Invarianten, denn die Determinante der orthogonalen Substitution, der sogenannte Modul der Substitution, ist:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = +1$$

für alle Werte des Winkels α. Mithin ist auch jede Potenz des Moduls, die bei den allgemeinen projektivischen Transformationen hinzutritt, gleich $+1$.

Ähnlich kann man auch die orthogonale Kovariante definieren: Eine Funktion

$$\psi(a, b, c, d, \ldots . x, y)$$

der Koeffizienten und Variabeln soll eine orthogonale Kovariante heißen, wenn nach Ausführen der orthogonalen Transformation die Gleichung besteht:

$$\psi(a, b, c, d, \ldots . x, y) = \psi(a', b', c', d', \ldots . x', y').$$

Selbstverständlich sind auch diese kovarianten Gebilde absolute, weil ja die Substitutionsdeterminante stets gleich $+1$ ist.

Es mag an dieser Stelle ein Satz hervorgehoben werden, der im Laufe der Arbeit verschiedentlich zur Anwendung kommen wird und eigentlich an sich klar ist, weil er auch für die allgemeinen Invarianten gilt und seine Richtigkeit bereits aus der Definition folgt. Man könnte ihn so formulieren:

„Jede orthogonale Invariante einer orthogonalen Kovariante der Kurve:

$$f(a, b, c, d, \ldots . x, y) = 0$$

ist selbst eine orthogonale Invariante der Kurve."

Der Beweis läßt sich, wie folgt, führen:

Es sei die Kurve dargestellt durch die Gleichung:

$$(1) \qquad f(x, y) = ax^n + by^n + \ldots . = 0.$$

Die Kovariante habe die Form:

$$(2) \qquad f'(x, y) = a' x^m + b' y^m + \ldots . = 0,$$

wo die Koeffizienten $a', b', c' \ldots .$ Funktionen von $a, b, c, d \ldots .$ sind. Das heißt also:

$$\begin{aligned} a' &= \varphi_1(a, b, c, d, \ldots .), \\ b' &= \varphi_2(a, b, c, d, \ldots .), \\ c' &= \varphi_3(a, b, c, d, \ldots .), \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Nach Ausführung der orthogonalen Transformation wird die Kurvengleichung folgende Gestalt annehmen:

$$(3) \qquad Ax'^n + By'^n + \ldots . = 0,$$

und die Gleichung der Kovariante geht über in:

$$(4) \qquad A'x'^m + B'y'^m + \ldots . = 0.$$

Laut Definition der orthogonalen Kovariante besteht die Gleichung:

$$(5) \qquad a'x^m + b'y^m + \ldots . = A''x'^m + B''y'^m + \ldots . = 0.$$

Hierin sind die Größen A'', B'', C'' usw. in derselben Weise aus A, B, C usw. zusammengesetzt, wie a', b', c' usw. aus den a, b, c usw. Es kommt also:

$$\begin{aligned} A'' &= \varphi_1(A, B, C, D \ldots .), \\ B'' &= \varphi_2(A, B, C, D \ldots .), \\ C'' &= \varphi_3(A, B, C, D \ldots .), \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Die Gleichungen (4) und (5) ergeben ferner:

$$A' = A'' = \varphi_1 (A, B, C, D \ldots .),$$
$$B' = B'' = \varphi_2 (A, B, C, D \ldots .),$$
$$C' = C'' = \varphi_3 (A, B, C, D \ldots .),$$
$$\vdots \quad \vdots$$

Ist nun

$$\Psi (a', b', c', d' \ldots .)$$

eine orthogonale Invariante der Kovariante (2), also:

$$\Psi (a', b', c', d' \ldots .) = \Psi (A'', B'', C'', D'' \ldots .),$$

so folgt

$$\Psi(\varphi_1 (a, b, c, d \ldots .), \ \varphi_2 (a, b, c, d \ldots .), \ \varphi_3 (a, b, c, d \ldots .) \ldots .)$$
$$= \Psi(\varphi_1 (A, B, C, D \ldots .), \ \varphi_2 (A, B, C, D \ldots .), \ \varphi_3 (A, B, C, D \ldots .) \ldots .).$$

Ordnet man, dann ergibt sich:

$$\Phi (a, b, c, d \ldots .) = \Phi (A, B, C, D \ldots .).$$

Beachtet man die Bedeutung der Größen $a, b, c, d \ldots .$ und $A, B, C, D \ldots .$, so erkennt man, daß die vorstehende Gleichung identisch mit der Definition der orthogonalen Invariante ist.

Die orthogonalen Invarianten werden, da sie im Gegensatze zu den allgemeinen Invarianten nur bei der speziellen orthogonalen Transformation Invarianz besitzen, hauptsächlich metrische Eigenschaften der geometrischen Gebilde ausdrücken. Ihre Hauptbedeutung und zugleich auch ihre Anwendbarkeit erhalten sie bei der Klassifizierung der Kurven, was ja bei den Kegelschnitten bereits erwiesen ist.

Nachdem schon seit längerer Zeit die orthogonalen Invarianten der Kegelschnitte bekannt waren, wurde von J. Thomae in Jena im Jahre 1899 das System der orthogonalen Invarianten für die allgemeinen Kurven dritter Ordnung aufgestellt. Dann sind die Mittelpunktskurven und die zirkularen Kurven dritter Ordnung nach dieser Richtung hin untersucht worden. Die hier folgenden Untersuchungen sind auf Anregung und mit gütiger Unterstützung von Herrn Prof. Dr. Gutzmer entstanden und sollen sich beschäftigen mit der Auffindung der orthogonalen Invarianten der bizirkularen Kurven vierter Ordnung; diese Gruppe von Kurven vierter Ordnung ist bekanntlich in inversionsgeometrischer Beziehung mit den oben erwähnten zirkularen Kurven dritter Ordnung verwandt.

Im Laufe der Arbeit wurden folgende Werke und Abhandlungen als Hilfsquellen benutzt:

J. Thomae, Über orthogonale Invarianten der Kurven dritter Ordnung. (Leipziger Berichte, Band 51.)

J. Thomae, Orthogonale Invarianten und Covarianten bei Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkt. (Leipziger Berichte, Band 55.)

Dölle, Orthogonale Invarianten und Covarianten der zirkularen Kurven dritter Ordnung. (Dissertation Jena 1906.)

Greiner, Über orthogonale Invarianten der Kurven dritter Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkt und ihre geometrische Bedeutung. (Dissertation Jena 1903.)

J. Koenigs, Leçons de l'agrégation classique de mathématique. Paris 1892.

Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces et sur la théorie des imaginaires. Paris 1873.

§ 2.

Allgemeine Bemerkungen über die Invarianten.

Die allgemeinen Invarianten der Kurven vierter Ordnung und speziell der bizirkularen Kurven vierter Ordnung sind natürlich auch orthogonale, da sie ja in ihrer Eigenschaft als allgemeine „projektive" Invarianten auch gegenüber der speziellen „orthogonalen" Transformation Invarianz besitzen. Während jedoch das allgemeine Invariantensystem (die gewöhnlich mit S und T bezeichneten Invarianten) der Kurven dritter Ordnung bekannt ist, so ist dies bei den Kurven vierter Ordnung nicht der Fall. In dem Lehrbuche von Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, sind zwei allgemeine Invarianten angegeben, die dort mit A und B bezeichnet sind. Und zwar ist A im allgemeinen Falle eine Invariante dritter Ordnung, die aus 25 Gliedern besteht. A selbst hat keine geometrische Bedeutung, wohl aber die Kontravariante, die die Evektante dieser Invariante A ist. Das Verschwinden der Kontravariante drückt aus, daß die Gerade ξi die Kurve in vier Punkten schneidet, für welche die Invariante S verschwindet.[1]) Die Darstellung ihres Wertes durch die Koeffizienten der Kurvengleichung und auch durch die orthogonalen Invarianten wird an anderer Stelle (§ 8) gegeben werden. Die zweite und letzte Invariante der allgemeinen C_4, die dort angegeben wird, ist eine Invariante sechster Ordnung in den Koeffizienten. Sie läßt sich darstellen als eine symmetrische Determinante sechster Ordnung und ist von Clebsch

1) Siehe Salmon-Fiedler, Höhere ebene Kurven. 2. Auflage. Seite 349.

gebraucht worden, um nachzuweisen, daß nicht jede Kurve vierter Ordnung darstellbar ist in der Form:

$$p^4 + q^4 + r^4 + s^4 + t^4 = 0,$$

wo p, q, r, s, t lineare Funktionen in den Koordinaten sind. Clebsch zeigte, daß nur diejenigen Kurven vierter Ordnung in dieser Form darstellbar sind, für welche diese Invariante sechster Ordnung verschwindet. Die Darstellung von B durch orthogonale Invarianten wird ebenfalls in § 8 erfolgen.

Wir wollen nunmehr zur Ausführung des eigentlichen Themas schreiten und den Ausführungen folgende Form der Kurvengleichung zugrunde legen:

$$(x^2 + y^2)^2 + 4 f^3(x, y) + 6 f^2(x, y) + 4 f^1(x, y) + f^0(x, y) = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$\begin{aligned} (a_{30} x + a_{03} y)(x^2 + y^2) &= f^3(x, y), \\ a_{20} x^2 + 2 a_{11} x y + a_{02} y^2 &= f^2(x, y), \\ a_{10} x + a_{01} y &= f^1(x, y), \\ a_{00} &= f_0(x, y). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ik} werden als reelle Größen vorausgesetzt. Die Kurvengleichung bringt jetzt unmittelbar die Eigenschaft der bizirkularen Kurven zum Ausdruck, daß sie die unendlich fernen Kreispunkte der Ebene als Doppelpunkte besitzen. Zugleich zeigt uns ihre im Gegensatze zu der allgemeinen Gleichung 4. Grades in x, y spezielle Form, daß die resultierenden Invarianten relativ einfache Ausdrücke annehmen werden.

§ 3.

Die Asymptoten der bizirkularen C_4 und die sich daraus ergebenden orthogonalen Invarianten O_1', O_1'', O_2, Ω_2', Ω_2''.

Allgemein bestimmt die Gleichung, die durch Nullsetzen der binären Form höchster Ordnung einer algebraischen Kurve entsteht, die Richtungsgrößen der Asymptoten. Bei der bizirkularen C_4 lautet diese Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = 0,$$

oder:

$$(x + iy)^2 (x - iy)^2 = 0.$$

Also laufen die paarweise parallelen imaginären Asymptoten den Nullstrahlen parallel.

Um die Achsenabschnitte zu bestimmen, wird, wie üblich, als Gleichung der Asymptote angesetzt:

$$\begin{aligned} &1)\ y = ix + c_1 \quad \text{oder:} \quad x + iy - ic_1 = 0, \\ &2)\ y = -ix + c_2 \qquad\quad x - iy + ic_2 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man 1) $y = ix + c_1$ und 2) $y = -ix + c_2$ in die Kurvengleichung ein, so ergeben sich für c_1 und c_2 in bekannter Weise folgende Werte:

$$c_1 = -a_{03} + a_{30}i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2) + 2i(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})},$$

$$c_2 = -a_{03} + a_{30}i \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2) - 2i(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})}.$$

Es resultieren mithin als Gleichungen der vier Asymptoten:

(I) $x + iy + a_{03}i + a_{30}$
$$+ \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2) + 2i(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})} = 0,$$

(II) $x + iy + a_{03}i + a_{30}$
$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2) + 2i(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})} = 0,$$

(III) $x - iy - a_{03}i + a_{30}$
$$+ \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2) - 2i(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})} = 0,$$

(IV) $x - iy - a_{03}i + a_{30}$
$$- \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2) - 2i(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})} = 0.$$

Zunächst möge nun der komplexe Wurzelausdruck mit Hilfe des Moivreschen Satzes auf eine bequemere Form gebracht werden.

Es schreibt sich also:

$$\sqrt{\alpha \pm \beta i} = \sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2}(\cos \varphi/_2 \pm i \sin \varphi/_2),$$

indem gesetzt wurde:

$$\alpha = 3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2),$$
$$\beta = 2(3a_{11} - 2a_{30}a_{03}).$$

Da nun die Gleichungen bestehen:

$$\sin X = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2X}{2}},$$

$$\cos X = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2X}{2}},$$

so erhält man für $\cos \varphi/_2$ und $\sin \varphi/_2$ folgende Werte:

$$\cos \varphi/_2 = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}},$$

$$\sin \varphi/_2 = \pm\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}.$$

Mithin wird:

$$\sqrt{\alpha+\beta i} = \pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + \left(\pm i\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right).$$

Mit Berücksichtigung beider Vorzeichenmöglichkeiten $\begin{pmatrix}+,+\\-,-\end{pmatrix}$ erhält man die beiden Gleichungsformen:

(I*) $\quad x+iy+a_{30}+a_{03}i-ai+b=0,$

(II*) $\quad x+iy+a_{30}+a_{03}i+ai-b=0.$

Hierin wurde gesetzt:

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Ähnlich wird:

$$\sqrt{\alpha-\beta i} = \pm\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} - \left(\pm i\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right).$$

Die beiden Vorzeichenmöglichkeiten sind hier:

$$+,\ -,$$
$$-,\ +.$$

Und es resultieren die Gleichungen:

(III*) $\quad x-iy+a_{30}-a_{03}i+ai+b=0,$

(IV*) $\quad x-iy+a_{30}-a_{03}i-ai-b=0.$

Wie man sieht, sind die Gleichungen (I*) und (III*), und (II*) und (IV*) einander konjugiert, was ja auch notwendig der Fall sein muß. Der reelle Schnittpunkt $P_{\mathrm{I,III}}$ des ersten Paares der Asymptoten (I, III) hat die Koordinaten:

$$x_{\mathrm{I,III}}=-a_{30}-b=-a_{30}-\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$y_{\mathrm{I,III}}=-a_{03}+a=-a_{03}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Das andere Paar hat einen Schnittpunkt $P_{\mathrm{II,IV}}$ mit folgenden Koordinaten:

$$x_{\mathrm{II,IV}}=-a_{30}+b=-a_{30}+\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$y_{\mathrm{II,IV}}=-a_{03}-a=-a_{03}-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Die Bedingung, daß einer von diesen beiden Punkten auf einer der Schnittgeraden des anderen liegt, muß notwendig eine orthogonale Invariante sein.

Man setze also z. B. die Koordinaten $x_{II,IV}$, $y_{II,IV}$ in die Gleichung (I*) ein; dies gibt:

$$-a_{30}+b+i(-a_{03}-a)+a_{03}i+a_{30}-ai+b=0$$

oder:

$$2b-2ai=0,$$
$$a+bi=0.$$

Es muß, da eine orthogonale Transformation an dieser Beziehung der Asymptoten zueinander nichts ändert,

$$a+bi$$

eine orthogonale Invariante sein. — Hätte man die Substitution in der Gleichung (III*) vollzogen, so wäre man zu dem Resultat gelangt:

$$a-bi=0.$$

Dies ist natürlich auch eine orthogonale Invariante. Die Substitution der Koordinaten $x_{I,III}$, $y_{I,III}$ in die Gleichung (II*) liefert:

$$-a_{30}-b+i(-a_{03}+a)+a_{03}i+a_{30}+ai-b=0$$

oder:

$$a+bi=0.$$

Setzt man $x_{I,III}$, $y_{I,III}$ in die Gleichung (IV*) ein, so folgt:

$$a-bi=0.$$

In beiden Fällen kommt man also auf die beiden orthogonalen Invarianten:

$$a+bi,$$
$$a-bi.$$

Nun war gesetzt:

$$a+bi=\sqrt{a+\beta i}=\sqrt{3(a_{20}-a_{02})+2(a_{03}^2-a_{30}^2)+2i(3a_{11}-2a_{30}a_{03})},$$
$$a-bi=\sqrt{a-\beta i}=\sqrt{3(a_{20}-a_{02})+2(a_{03}^2-a_{30}^2)-2i(3a_{11}-2a_{30}a_{03})}.$$

Es soll jetzt gesetzt werden:

$$O_1'=\sqrt{3(a_{20}-a_{02})+2(a_{03}^2-a_{30}^2)+2i(3a_{11}-2a_{30}a_{03})},$$
$$O_1''=\sqrt{3(a_{20}-a_{02})+2(a_{03}^2-a_{30}^2)-2i(3a_{11}-2a_{30}a_{03})}.$$

Da das Produkt zweier orthogonalen Invarianten wieder eine orthogonale Invariante ist, so folgt, daß

$$\sqrt{a+\beta i}\sqrt{a-\beta i}=O_1'\cdot O_1''$$
$$=\sqrt{[3(a_{20}-a_{02})+2(a_{03}^2-a_{30}^2)]^2+4(3a_{11}-2a_{30}a_{03})^2}=O_2$$

eine orthogonale Invariante ist. Diese Invariante O_2 ist wohl als die eigentliche Invariante anzusehen, wogegen die anderen O_1', O_1'' nur andere Formen von O_2 sind, die auch dieselbe geometrische Eigenschaft ausdrücken wie jene.

Die Koeffizienten der Kurvengleichung sind als reell vorausgesetzt, mithin sind auch:

$$\alpha = 3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2),$$
$$\beta = 2(3a_{11} - 2a_{30}a_{03})$$

reelle Größen. Da nun aus $\alpha + \beta i = 0$ sich $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ergibt, so verschwinden mit O_1' auch zugleich O_1'' und O_2.

Nun war $O_1' = 0$ die Bedingung dafür, daß der Asymptoten-Schnittpunkt $P_{II, IV}$ auf der Asymptote (I*) liegt, ebenso war $O_1'' = 0$ die Bedingung dafür, daß der Punkt $P_{II, III}$ auf der Asymptote (III*) liegt. Ist nun $O_1' = 0$, dann wird auch ohne weiteres $O_1'' = 0$; d. h. also:

> Ist $O_1' = 0$, oder — was dem äquivalent ist — $O_1'' = 0$ oder $O_2 = 0$, dann fallen die beiden konjugiert komplexen Asymptotenpaare in ein einziges zusammen.

Dies kann man auch so ausdrücken: Die beiden Tangenten in je einem Doppelpunkt fallen zusammen. Dies ist aber nur möglich, wenn die Doppelpunkte zu Spitzen werden. Nun nennt man bizirkulare Kurven, die die beiden unendlich fernen Kreispunkte zu Spitzen haben: kartesische Ovale. In diesem Falle werden die Asymptoten sogenannte „Rückkehrasymptoten". Man könnte das Resultat auch noch so formulieren:

> Das Verschwinden einer der orthogonalen Invarianten O_1', O_1'', O_2 liefert die Bedingung dafür, daß die allgemeinen bizirkularen Kurven in kartesische Ovale übergehen.

Die Richtigkeit dieses Resultates wird auch sofort durch die Form der Kurvengleichung bestätigt, in welche die allgemeine Gleichung nach dieser Annahme übergeht.

Aus O_1' und O_1'' ergeben sich noch folgende orthogonalen Invarianten:

$$\Omega_2' = \frac{1}{2}(O_1'^2 + O_1''^2) = \alpha = 3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2),$$

$$\Omega_2'' = \frac{1}{2i}(O_1'^2 - O_1''^2) = \beta = 6a_{11} - 4a_{30}a_{03}.$$

Die Koordinaten der früher gefundenen Asymptotenschnittpunkte $P_{I, III}$, $P_{II, IV}$ stellen sich mit Hilfe der gefundenen orthogonalen Invarianten in folgender Weise dar:

$$x_{I, III} = -a_{30} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Omega_2' + O_2},$$
$$y_{I, III} = -a_{03} + \tfrac{1}{2}\sqrt{+\Omega_2' + O_2},$$
$$x_{II, IV} = -a_{30} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Omega_2' + O_2},$$
$$y_{II, IV} = -a_{03} - \tfrac{1}{2}\sqrt{+\Omega_2' + O_2}.$$

Der Mittelpunkt der Strecke $P_{I,III}\ P_{II,IV}$ hat die Koordinaten $x_1 = -a_{30}$, $y_1 = -a_{03}$, d. h. der Mittelpunkt der Verbindungslinie der reellen Asymptotenschnittpunkte ist derjenige Punkt, den man bei diesen Kurven gewöhnlich als Fundamentalpunkt bezeichnet.[1]) Ist die Invariante O_2 gleich null, dann hat der Schnittpunkt der beiden „Rückkehrasymptoten" die Koordinaten: $x_1 = -a_{30}$, $y_1 = -a_{03}$. Im Falle des kartesischen Ovales ist der Fundamentalpunkt auch zugleich Schnittpunkt der beiden singulären Asymptoten. Die weitere geometrische Bedeutung dieser Punkte erkennt man, wenn man berücksichtigt:

1. die Plückersche Definition des Brennpunktes,
2. die Inversionsgeometrie der bizirkularen Kurven.

Unter dem Brennpunkt einer algebraischen Kurve versteht man den Schnittpunkt zweier Geraden, die die Kurve berühren und durch die absoluten Punkte gehen. Die Asymptoten berühren die bizirkulare C_4 nun in den absoluten Punkten selbst, und zwar dreifach. Es zählt demnach jeder der beiden Asymptotenschnittpunkte, wenn ausschließlich die reellen Brennpunkte beachtet werden, als doppelter Brennpunkt. Im Falle des kartesischen Ovales ist dann der Fundamentalpunkt ein dreifacher Brennpunkt, wenn ebenfalls nur wieder die reellen Brennpunkte beachtet werden. Bei der Zählung der reellen und imaginären Brennpunkte wäre er als neunfacher zu zählen; und die beiden doppelten Brennpunkte der allgemeinen bizirkularen Kurve würden alsdann je als vierfache zählen.

Außer dieser Bedeutung der „Asymptotenpunkte" haben diese eine nicht minder interessante, wenn man die Kurven vom Standpunkte der Inversionsgeometrie aus betrachtet. Bekanntlich trifft dann folgende Definition auf die bizirkularen Quartiken zu: Die bizirkulare C_4 ist die Enveloppe eines Kreises, dessen Mittelpunkt sich auf einem festen Mittelpunktskegelschnitt bewegt, und der einen festen Kreis stets senkrecht schneidet. Ferner zeigt die Theorie der Inversion, daß die bizirkularen C_4 vier Anallagmatien haben, d. h. daß es vier Inversionszentra gibt, von denen die Kurven invers transformiert in sich selbst übergehen. Die hierdurch bedingten vier Deferentkegelschnitte sind, wie dort[2]) gezeigt wird, konfokal und haben als Brennpunkte die beiden „Asymptotenpunkte". Ist die bizirkulare Kurve speziell ein kartesisches Oval, so gehen die vier Kegelschnitte in vier konzentrische Kreise über, deren Mittelpunkt der Fundamentalpunkt ist.

1) Loria, Spezielle ebene Kurven. Zweite Auflage 1910. Band 1. Seite 118.
2) Literatur hierüber: Enzyklopädie der math. Wiss., Band IV, Seite 551 ff.

Die Entfernung der beiden „Asymptotenpunkte“ ist natürlich auch eine orthogonale Invariante. Und zwar ist sie von der Beschaffenheit, daß sie an sich eine geometrische Bedeutung hat, ohne erst gleich null gesetzt zu werden. Bezeichnet man die Entfernung mit R, so ist:

$$R^2 = (x_{II,\,IV} - x_{I,\,III})^2 + (y_{II,\,IV} - y_{I,\,III})^2$$

$$= \left(+\sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 + \left(-\sqrt{+\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2 = 2\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2O_2.$$

Die hieraus sich ergebende geometrische Bedeutung von O_2 kann man folgendermaßen aussprechen:

> O_2 ist gleich dem halben Quadrat des Abstandes der beiden Asymptotenpunkte.

Der ausgerechnete Wert für O_2 lautet:

$$O_2 = \sqrt{\left([3\,(a_{20} - a_{02}) + 2\,(a_{03}^2 - a_{30}^2)]^2 + [6\,a_{11} - 4\,a_{30}\,a_{03}]^2\right)}$$

$$= \sqrt{\big(9\,(a_{20} - a_{02})^2 + 12\,(a_{03}^2 - a_{30}^2)\,(a_{20} - a_{02}) + 4\,(a_{03}^2 + a_{30}^2)^2 + 36\,a_{11}^2 - 48\,a_{11}\,a_{30}\,a_{03}\big)}.$$

§ 4.

Der Fundamentalpunkt $(-a_{30}, -a_{03})$ und die orthogonale Invariante O_4.

Eine neue orthogonale Invariante liefert die Transformation des Anfangspunktes des Koordinatensystems in den Fundamentalpunkt. Setzt man in der Kurvengleichung:

$$(x'^2 + y'^2)^2 + 4f^3(x', y') + 6f^2(x', y') + 4f^1(x', y') + a_{00} = 0$$

$x - a_{30}$ für x' und $y - a_{03}$ für y' ein, so wird:

$$\begin{aligned}
(x'^2+y'^2)^2 = {} & x^4 + 4a_{30}^2x^2 + a_{30}^4 + y^4 + 4a_{03}^2y^2 + a_{03}^4 - 4a_{30}x^3 + 2a_{30}^2x^2 \\
& + 2x^2y^2 - 4a_{03}x^2y + 2a_{03}^2x^2 - 4a_{30}^3x - 4a_{30}xy^2 + 8a_{30}a_{03}xy \\
& - 4a_{30}a_{03}^2x + 2a_{30}^2y^2 - 4a_{30}^2a_{03}y + 2a_{30}^2a_{03}^2 - 4a_{03}y^3 \\
& + 2a_{03}^2y^2 - 4a_{03}^3y, \\
4f^3(x',y') = {} & 4a_{30}x^3 - 8a_{30}^2x^2 + 4a_{30}^3x + 4a_{30}xy^2 - 8a_{30}a_{03}xy + 4a_{30}a_{03}^2x \\
& - 4a_{30}^2x^2 + 8a_{30}^3x - 4a_{30}^4 - 4a_{30}^2y^2 + 8a_{30}^2a_{03}y - 4a_{30}^2a_{03}^2 \\
& + 4a_{03}x^2y - 8a_{30}a_{03}xy + 4a_{30}^2a_{03}y + 4a_{03}y^3 - 8a_{03}^2y^2 \\
& + 4a_{03}^3y - 4a_{03}^2x^2 + 8a_{30}a_{03}^2x - 4a_{03}^2a_{30}^2 - 4a_{03}^2y^2 + 8a_{03}^3y \\
& - 4a_{03}^4, \\
6f^2(x',y') = {} & 6a_{20}x^2 - 12a_{30}a_{20}x + 6a_{30}^2a_{20} + 12a_{11}xy - 12a_{30}a_{11}y \\
& - 12a_{11}a_{03}x - 12a_{30}a_{03}a_{11} + 6a_{02}y^2 - 12a_{03}a_{02}y + a_{03}^2a_{02}, \\
4f^1(x',y') = {} & 4a_{10}x - 4a_{10}a_{30} + 4a_{01}y - 4a_{01}a_{03}, \\
f^0(x',y') = {} & a_{00}.
\end{aligned}$$

Die Addition der Gleichungen ergibt:

$$f^4(x',y') + 4f^3(x',y') + 6f^2(x',y') + 4f^1(x',y') + f^0(x',y') = f(x,y)$$
$$= (x^2+y^2)^2 + A_{20}x^2 + 2A_{11}xy + A_{02}y^2 + 4A_{10}x + 4A_{01}y + A_{00} = 0.$$

Hierin ist gesetzt:

$$A_{20} = 6a_{20} - 2a_{30}{}^2 - 6a_{03}{}^2,$$
$$A_{11} = 6a_{11} - 4a_{30}a_{03},$$
$$A_{02} = 6a_{02} - 6a_{30}{}^2 - 2a_{03}{}^2,$$
$$A_{10} = 2a_{30}(a_{30}{}^2 + a_{03}{}^2) - 3a_{30}a_{20} - 3a_{03}a_{11} + a_{10},$$
$$A_{01} = 2a_{03}(a_{30}{}^2 + a_{03}{}^2) - 3a_{03}a_{02} - 3a_{30}a_{11} + a_{01},$$
$$A_{00} = 6(a_{20}a_{30}{}^2 + a_{02}a_{03}{}^2) + 12a_{11}a_{30}a_{03} - 3(a_{30}{}^2 + a_{03}{}^2)^2$$
$$- 4(a_{10}a_{30} + a_{01}a_{03}) + a_{00} = f(-a_{30}, -a_{03}).$$

Hiernach ist also $f(-a_{30}, -a_{03}) = 0$ die Bedingung dafür, daß der Fundamentalpunkt ein Punkt der Kurve ist. Diese Bedingung ist aber unabhängig von der Wahl des rechtwinkligen Koordinatensystems. Denn man muß dasselbe Resultat erhalten, ob man die Kurvengleichung erst auf einen anderen Anfangspunkt und dann auf den Fundamentalpunkt als Anfangspunkt des Koordinatensystems transformiert, oder ob man die Transformation auf den Fundamentalpunkt sofort direkt vollzieht. Es ist also $f(-a_{30}, -a_{03})$ eine Verschiebungsinvariante. Außerdem ist A_{00}, weil absolutes Glied, eine Drehungsinvariante. Daher kann man den Schluß ziehen, daß $f(-a_{30}, -a_{03})$ eine orthogonale Invariante ist; denn jede orthogonale Invariante ist zugleich Drehungs- und Verschiebungsinvariante. In Zukunft möge $f(-a_{30}, -a_{03})$ mit O_4 bezeichnet werden. Der Ausdruck für O_4 lautet also:

$$O_4 = 6(a_{30}{}^2a_{20} + a_{03}{}^2a_{02}) + 12a_{30}a_{03}a_{11} - 3(a_{30}{}^2 + a_{03}{}^2)^2 - 4(a_{30}a_{10} + a_{03}a_{01}) + a_{00}.$$

Die geometrische Bedeutung von O_4 läßt sich so kennzeichnen:

Das Verschwinden der orthogonalen Invariante O_4 ist die Bedingung dafür, daß der Fundamentalpunkt ein Punkt der bizirkularen C_4 ist.

Durch die Parallelverschiebung des Koordinatensystems sind zwei von den drei verfügbaren Größen der orthogonalen Transformation festgelegt. Willkürlich bleibt nur noch die dritte Größe, d. h. der Winkel der Drehung des Koordinatenkreuzes. Die Parallelverschiebung hat bewirkt, daß der Gliederkomplex $f^3(x,y)$ aus der allgemeinen Kurvengleichung herausgefallen ist. Diese Tatsache ergibt für den Punkt $(-a_{30}, -a_{03})$ eine geometrische Eigenschaft, nämlich: Auf jedem Strahl des Strahlenbüschels, den man durch den Fundamentalpunkt legen kann, werden durch die Kurve 4. Ordnung 4 Abschnitte derart gebildet, daß ihre algebraische Summe den Wert null ergibt. Anders aufgefaßt heißt

dies: die Kurve erfüllt bereits ihrer Natur nach eine Mittelpunktsbedingung. Denn für Kurven gerader Ordnung ist der Koordinatenanfang dann Mittelpunkt, wenn die Kurvengleichung die Form besitzt:

$$0 = U_0 + U_2 + U_4 + \ldots,$$

wo U_0 Glieder nullten Grades in den Variabeln,
U_2 . . . . zweiten . . . .
⋮ ⋮

sind. Einen wirklichen Mittelpunkt hat die Kurve, wenn zu jedem Radius vektor ein gleich großer negativer gehört, was im vorliegenden Falle mit der Bedingung identisch ist, daß die Glieder erster Ordnung verschwinden. Es soll die Aufgabe eines der folgenden Paragraphen sein, die invariante Bedingung hierfür herzuleiten.

Es soll nun kurz das Resultat dieses Abschnittes zusammengestellt werden. Für den Koeffizienten von xy in der transformierten Gleichung war, wenn man von dem Faktor 2 absieht, folgender Ausdruck gefunden:

$$6a_{11} - 4a_{30}a_{03}.$$

Dieser ist aber gleich der im § 3 mit Ω_2'' bezeichneten Invariante. Setzt man noch für A_{00} die Invariante O_4, so schreibt sich die Kurvengleichung in der Form:

$$(x^2+y^2)^2 + A_{20}x^2 + 2\Omega_2'' xy + A_{02}y^2 + 4A_{10}x + 4A_{01}y + O_4 = 0.$$

Es sind also der Koeffizient von xy und $f^0(x,y)$ durch orthogonale Invarianten ausgedrückt.

§ 5.

Die kovarianten Kegelschnitte des Fundamentalpunktes in bezug auf die Grundkurve und ihre orthogonalen Invarianten.

Die erste Polare des Fundamentalpunktes hat die Gleichung:

$$-a_{30}\frac{dU}{dx} - a_{03}\frac{dU}{dy} + 1\frac{dU}{dz} = 0,$$

in der U die Funktion auf der linken Seite der allgemeinen Gleichung (siehe § 2) bedeutet. Die Größe z ist die homogenisierende Koordinate und dem Werte nach gleich 1, da man sich gesetzt zu denken hat:

$$x = \frac{x}{z}, \quad y = \frac{y}{z}.$$

Es werden:

$$\frac{dU}{dx} = 4(x^2+y^2)x + 8(a_{30}x + a_{03}y)x + 4a_{30}(x^2+y^2) + 6(2a_{20}x + 2a_{11}y) + 4a_{10},$$

$$\frac{dU}{dy} = 4(x^2+y^2)y + 8(a_{30}x + a_{03}y)y + 4a_{03}(x^2+y^2) + 6(2a_{11}x + 2a_{02}y) + 4a_{01},$$

$$\frac{dU}{dz} = 4(a_{30}x + a_{03}y)(x^2+y^2) + 12(a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2) + 12(a_{10}x + a_{01}y) + 4a_{00}.$$

Die Gleichung der ersten Polare wird mithin:

$$x^2(3a_{20}-3a_{30}{}^2-a_{03}{}^2)+2xy(3a_{11}-2a_{30}a_{03})+y^2(3a_{02}-a_{30}{}^2-3a_{03}{}^2)$$
$$+3x(-a_{30}a_{20}-a_{11}a_{03}+a_{10})+3y(-a_{11}a_{30}-a_{02}a_{03}+a_{01})+(a_{00}-a_{10}a_{30}$$
$$-a_{01}a_{03})=0,$$

also die eines Kegelschnittes. Im allgemeinen ist nun nach der Theorie ein n-facher Punkt der Grundkurve ein $(n-1)$-facher der ersten Polarkurve. Da die unendlich fernen Kreispunkte Doppelpunkte dieser C_4 sind, so folgt nach dem eben zitierten Satze, daß die erste Polare einer bizirkularen Quartik im allgemeinen eine Kurve dritter Ordnung ist, die durch die absoluten Punkte geht, und zwar diese als einfache Punkte enthält, d. h. die erste Polare ist gewöhnlich eine zirkulare Kurve dritter Ordnung. Diese C_3 für den Punkt $(-a_{30}, -a_{03})$ degeneriert in den Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade; diese letztere muß notwendig ein Bestandteil der I. Polarkurve des Punktes $(-a_{30}, -a_{03})$ sein, weil diese immer durch die absoluten Punkte geht. Also haben wir den Satz:

> Die im allgemeinen als erste Polarkurve auftretende zirkulare C_3 degeneriert für den kovarianten Punkt $(-a_{30}, -a_{03})$ in einen Kegelschnitt und die unendlich ferne Gerade.

Bevor die Gleichung dieses Kegelschnittes näher diskutiert werde, ist es ratsam, auch die Gleichung der zweiten Polare des Fundamentalpunktes aufzustellen, was dann zu weiteren Ergebnissen führen wird.

Die zweite Polare des Punktes $(-a_{30}, -a_{03}, 1)$ ist natürlich auch eine kovariante Kurve der Grundkurve. Der allgemeine Ausdruck der zweiten Polare eines Punktes $(\xi, \eta, 1)$ ist bekanntlich der folgende:

$$\xi^2\frac{d^2U}{dx^2}+\eta^2\frac{d^2U}{dy^2}+1\frac{d^2U}{dz^2}+2\xi\eta\frac{d^2U}{dxdy}+2\xi\frac{d^2U}{dxdz}+2\eta\frac{d^2U}{dydz}=0.$$

Hierin bedeutet in dem vorliegenden Falle:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=4(3x^2+y^2)+8(2a_{30}x+a_{03}y)+8a_{30}x+12a_{20},$$
$$\frac{d^2U}{dy^2}=4(x^2+3y^2)+8(a_{30}x+2a_{03}y)+8a_{03}x+12a_{02},$$
$$\frac{d^2U}{dz^2}=12(a_{20}x^2+2a_{11}xy+a_{02}y^2)+24(a_{10}x+a_{01}y)+12a_{00},$$
$$\frac{d^2U}{dxdy}=8xy+8a_{03}x+8a_{30}y+12a_{11},$$
$$\frac{d^2U}{dxdz}=4a_{30}(x^2+y^2)+8x(a_{30}x+a_{03}y)+12(2a_{20}x+2a_{11}y)+12a_{10},$$
$$\frac{d^2U}{dydz}=4a_{03}(x^2+y^2)+8y(a_{30}x+a_{03}y)+12(2a_{11}x+2a_{02}y)+12a_{01}.$$

Für $\xi = -a_{30}$, $\eta = -a_{03}$ kommt mithin die Gleichung:

$$x^2(3a_{20} - 3a_{30}^2 - a_{03}^2) + 2xy(3a_{11} - 2a_{30}a_{03}) + y^2(3a_{02} - a_{30}^2 - 3a_{03}^2) + 3x[2a_{30}(a_{30}^2 + a_{03}^2) + 2a_{10} - 4(a_{30}a_{20} + a_{11}a_{03})] + 3y[2a_{03}(a_{30}^2 + a_{03}^2) + 2a_{01} - 4(a_{30}a_{11} + a_{02}a_{03})] + 3(a_{30}^2a_{20} + a_{03}^2a_{02}) + 3a_{00} + 6a_{11}a_{30}a_{03} - 6(a_{30}a_{10} + a_{03}a_{01}) = 0.$$

Vergleicht man die Gleichung dieses Kegelschnittes mit dem, der sich bei der degenerierten ersten Polaren ergab, so findet man eine Übereinstimmung der entsprechenden Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung. Nun ändert eine Parallelverschiebung, die die linearen Glieder beseitigt, die Koeffizienten der Glieder höchster Ordnung nie, da diese stets Verschiebungsinvarianten sind. Wenn die Verschiebung in den zugehörigen Mittelpunkt vollzogen ist, werden also die Gleichungsformen resultieren:

(I) $$x^2(3a_{20} - 3a_{30}^2 - a_{03}^2) + xy(6a_{11} - 4a_{30}a_{03}) + y^2(3a_{02} - a_{30}^2 - 3a_{30}^2) + a = 0,$$

(II) $$x^2(3a_{20} - 3a_{30}^2 - a_{03}^2) + xy(6a_{11} - 4a_{30}a_{03}) + y^2(3a_{02} - a_{30}^2 - 3a_{03}^2) + a' = 0.$$

Diese Gleichungen stellen aber zwei ähnliche Kegelschnitte in ähnlicher Lage dar. Das gefundene Resultat kann man so aussprechen:

> Der Kegelschnitt, der den endlichen Teil der ersten Polarkurve des Fundamentalpunkts bildet, und der Polarkegelschnitt desselben Punktes in bezug auf die Grundkurve sind zwei ähnliche und ähnlich liegende Kurven zweiter Ordnung.

Die Summe der Koeffizienten von x^2 und y^2 in der allgemeinen Kegelschnittsgleichung ist stets eine orthogonale Invariante. Da die hier behandelten Kegelschnitte orthogonale Kovarianten sind, so folgt nach dem bereits in der Einleitung angegebenen Satze, daß sämtliche orthogonalen Invarianten dieser Kovarianten auch solche der Grundkurve sind. Es ist mithin die Summe der Koeffizienten von x^2 und y^2

$$3(a_{20} + a_{02}) + 4(a_{30}^2 + a_{03}^2) = \Omega_2$$

eine orthogonale Invariante der Grundkurve. Ihr Verschwinden bedeutet, daß die Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln werden. Verschwindet also die orthogonale Invariante Ω_2, so werden die beiden kovarianten Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln.

Bereits in § 3 war die orthogonale Invariante gefunden:

$$\Omega_2' = 3(a_{20} - a_{02}) + 2(a_{03}^2 - a_{30}^2),$$

ferner soeben: $$\Omega_2 = 3(a_{20} + a_{02}) - 4(a_{30}^2 + a_{03}^2).$$

Bildet man $\Omega_2 + \Omega_2'$ respektive $\Omega_2 - \Omega_2'$, so folgt:

$$\Omega_2 + \Omega_2' = 6a_{20} - 6a_{30}^2 - 2a_{03}^2,$$
$$\Omega_2 - \Omega_2' = 6a_{02} - 2a_{30}^2 - 6a_{03}^2.$$

Vergleicht man diese Größen mit den Koeffizienten A_{20} bezw. A_{02} der Gleichungsform in § 4, so findet man, daß:

$$A_{20} = \Omega_2 + \Omega_2',$$
$$A_{02} = \Omega_2 - \Omega_2'.$$

Demnach resultiert die Kurvengleichung in der Form:

$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2')x^2+2\Omega_2''xy+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+4A_{10}x+4A_{01}y+O_4=0,$

oder:

$(x^2+y^2)^2+\Omega_2(x^2+y^2)+\Omega_2'(x^2-y^2)+2\Omega_2''xy+4A_{10}x+4A_{01}y+O_4=0.$

Hierauf bezogen nehmen die Kovarianten I und II die Form an:

(I) $(\Omega_2+\Omega_2')x^2+2\Omega_2''xy+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+6A_{10}x+6A_{01}y+2O_4=0,$

(II) $(\Omega_2+\Omega_2')x^2+2\Omega_2''xy+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+12A_{10}x+12A_{01}y+6O_4=0.$

Mit Hilfe dieser Gleichungen sollen nun die übrigen Invarianten dieser Kovarianten aufgestellt werden, wobei man zugleich den Vorteil hat, daß diese zusammengesetzten Invarianten sich unmittelbar durch die einfacheren ausdrücken. Die Invariante, deren Verschwinden die Bedingung für das Auftreten der Parabel ist, nimmt hier die Gestalt an:

$$\Omega_1 = \Omega_2^2 - \Omega_2'^2 - \Omega_2''^2,$$

oder da $\Omega_2'^2 + \Omega_2''^2 = O_2^2$ ist:

$$\Omega_4 = \Omega_2^2 - O_2^2.$$

Die Invariante, die das Zerfallen des Kegelschnittes in zwei Geraden bedingt, die Diskriminante, hat für die Kovariante I den Wert:

$\Omega = 18A_{10}A_{01}\Omega_2'' + 2O_4(\Omega_2^2 - O_2^2) - 9(A_{10}^2 + A_{01}^2)\Omega_2 + 9\Omega_2'(A_{10}^2 - A_{01}^2),$

für die Kovariante II:

$\Omega' = 72A_{10}A_{01}\Omega_2'' + 6O_4(\Omega_2^2 - O_2^2) - 36(A_{10}^2 + A_{01}^2)\Omega_2 + 36\Omega_2'(A_{10}^2 - A_{01}^2).$

Wird $A_{10} = A_{01} = 0$, was der Existenz eines Mittelpunktes entspricht, wie der nächste Paragraph lehren wird, dann kommt:

$$\Omega = 2O_4(\Omega_2^2 - O_2^2),$$
$$\Omega' = 6O_4(\Omega_2^2 - O_2^2).$$

In diesem Falle ist also $\Omega' = 3\Omega$. Außerdem gehen für Mittelpunktskurven die Kovarianten über in zwei Kegelschnitte mit demselben Mittelpunkt (und zwar ist dies dann der Fundamentalpunkt). Denn ihre Gleichungen lauten:

(I) $(\Omega_2+\Omega_2')x^2+2\Omega_2''xy+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+2O_4=0,$

(II) $(\Omega_2+\Omega_2')x^2+2\Omega_2''xy+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+6O_4=0.$

Eine weitere zusammengesetzte Invariante erhält man, wenn man die Entfernung der beiden Mittelpunkte, die kovariante Punkte sind, ausrechnet. Der Mittelpunkt der Kovarianten I hat die Koordinaten:

$$x_I = -3\frac{A_{10}(\Omega_2 - \Omega_2') - A_{01}\Omega_2''}{\Omega_2^2 - O_2^2},$$

$$y_I = +3\frac{A_{10}\Omega_2'' - A_{01}(\Omega_2 - \Omega_2')}{\Omega_2^2 - O_2^2}.$$

Die Koordinaten des anderen werden:

$$x_{II} = -6\frac{A_{10}(\Omega_2 - \Omega_2') - A_{01}\Omega_2''}{\Omega_2^2 - O_2^2},$$

$$y_{II} = +6\frac{A_{10}\Omega_2'' - A_{01}(\Omega_2 - \Omega_2')}{\Omega_2^2 - O_2^2}.$$

Bezeichnet man die Entfernung dieser beiden Punkte mit R, so wird:

$$R^2 = \frac{9}{(\Omega_2^2 - O_2^2)^2}\left\{(A_{10}^2 + A_{01}^2)(\Omega_2^2 + O_2^2) + 2\Omega_2\Omega_2'(A_{10}^2 - A_{01}^2) - 4A_{10}A_{01}\Omega_2\Omega_2'\right\}$$

Man sieht auch hier wieder, daß R für $A_{10} = A_{01} = 0$ zu null wird, also die beiden Mittelpunkte in den Fundamentalpunkt zusammenfallen.

§ 6.

Die orthogonale Mittelpunktsinvariante $\omega_3 = \sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2}$.

Die dritte noch willkürliche Konstante der orthogonalen Transformation soll jetzt so gewählt werden, daß die Koeffizienten der Glieder in x und y einander gleich werden. Man könnte die Gleichung der Kurve auch auf die Form bringen:

$$(x^2 + y^2)^2 + b_{20}'x^2 + b_{02}'y^2 + b_{10}'x + b_{01}'y + O_4 = 0,$$

aber es wird sich zeigen, daß die oben beabsichtigte Darstellung der Gleichung die gestellte Aufgabe löst. Transformiert man also die Kurvengleichung mit Hilfe der Transformationsgleichungen:

$$x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi,$$
$$y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

so geht das Glied $(x^2 + y^2)^2$ in $(x'^2 + y'^2)^2$ über, ferner bleibt das konstante Glied O_4 unverändert. Der Koeffizient von x wird, wenn von dem Zahlenfaktor 4 abgesehen wird:

$$A_{10}\cos\varphi - A_{01}\sin\varphi,$$

derjenige von y wird:

$$A_{10}\sin\varphi + A_{01}\cos\varphi.$$

Sollen beide gleich sein, so muß die Gleichung bestehen:

$$A_{10}\cos\varphi - A_{01}\sin\varphi = A_{10}\sin\varphi + A_{01}\cos\varphi.$$

Daraus ergibt sich: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_{10} - A_{01}}{A_{10} + A_{01}}$,

also: $\sin\varphi = \dfrac{A_{10} - A_{01}}{\sqrt{2(A_{10}^2 + A_{01}^2)}}$; $\cos\varphi = \dfrac{A_{10} + A_{01}}{\sqrt{2(A_{10}^2 + A_{01}^2)}}$,

wo, um Eindeutigkeit zu erzielen, das Pluszeichen vor der Wurzel genommen ist. Der Koeffizient von x (gleich dem von y) wird:

$$\frac{A_{10}(A_{10} + A_{01})}{\sqrt{2(A_{10}^2 + A_{01}^2)}} - \frac{A_{01}(A_{10} - A_{01})}{\sqrt{2(A_{10}^2 + A_{01}^2)}} = \sqrt{\frac{A_{10}^2 + A_{01}^2}{2}}.$$

Bezeichnet man $\sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2}$ mit ω_3, dann läßt sich die Kurvengleichung schreiben:

$$(x^2 + y^2)^2 + b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + 2\sqrt{2}\ \omega_3(x + y) + O_4 = 0.$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß ω_3 eine orthogonale Invariante ist. Dieser Nachweis kann auf folgende Weise geführt werden: Die Ausrechnung ergibt für die Polargerade des Fundamentalpunktes folgenden Wert:

$$x[2a_{30}(a_{30}^2 + a_{03}^2) - 3a_{20}a_{30} - 3a_{11}a_{03} + a_{10}] + y[2a_{03}(a_{30}^2 + a_{03}^2) - 3a_{02}a_{03} - 3a_{11}a_{30} + a_{10}] + 3(a_{30}^2 a_{20} + a_{03}^2 a_{02} + 2a_{11}a_{30}a_{03}) - (a_{30}^2 + a_{03}^2)^2 - 3(a_{10}a_{30} + a_{01}a_{03}) + a_{00} = 0.$$

Die Koeffizienten von x bezw. y in dieser Gleichung sind, wie leicht ersichtlich, identisch mit A_{10} bezw. A_{01}. Ist nun die Gleichung der Geraden:

$$ax + by + c = 0,$$

so läßt sich leicht zeigen, daß $a^2 + b^2$ eine orthogonale Invariante dieser Geraden ist. Es ist mithin $A_{10}^2 + A_{01}^2$ eine orthogonale Invariante der Polargeraden. Da nun die Polargerade eine Kovariante der Grundkurve ist, folgt nach dem bereits öfter angewandten Satze, daß $A_{10}^2 + A_{01}^2$ also auch $\sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2} = \omega_3$ eine orthogonale Invariante der Grundkurve ist. Ausgerechnet lautet ω_3^2:

$$\omega_3^2 = 4(a_{30}^2 + a_{03}^2)^3 + 9(a_{30}^2 a_{20}^2 + a_{03}^2 a_{02}^2) + 9a_{11}^2(a_{30}^2 + a_{03}^2) + (a_{10}^2 + a_{01}^2) - 12(a_{30}^2 + a_{03}^2)(a_{30}^2 a_{20} + a_{03}^2 a_{02}) - 24a_{30}a_{03}a_{11}(a_{30}^2 + a_{03}^2) + 4(a_{30}^2 + a_{03}^2)(a_{30}a_{10} + a_{03}a_{01}) + 18a_{30}a_{03}a_{11}(a_{20} + a_{02}) - 6(a_{30}a_{20}a_{10} + a_{03}a_{02}a_{01}) - 6a_{11}(a_{30}a_{01} + a_{03}a_{10}).$$

ω_3 ist also von der sechsten Ordnung.

Die geometrische Bedeutung der Invariante leuchtet unmittelbar ein. Verschwindet nämlich ω_3, so heißt dies, weil A_{10} und A_{01} reell und mithin A_{10}^2 und A_{01}^2 positive Größen sind,

$$A_{10} = A_{01} = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann verschwinden die linearen Glieder aus der Kurvengleichung. Da nun die Glieder dritter Ordnung so beschaffen

sind, daß sie durch Verschiebung des Koordinatenanfangs in den Punkt $(-a_{30}, -a_{03})$ stets beseitigt werden können, so wird also durch $\omega_3 = 0$ die zweite noch notwendige Bedingung erfüllt, damit ein Mittelpunkt vorhanden ist. Aus diesem Grunde soll ω_3 die „Mittelpunktsinvariante“ genannt werden.

§ 7.

Normalformen der Kurvengleichung.

Im Laufe der Untersuchungen hatte sich folgende Kurvengleichung ergeben (siehe § 5, Seite 20):

(1) $(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2')x+2\Omega_2''xy+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+4A_{10}x+4A_{01}y+O_4=0.$

Wie bereits im vorigen Paragraphen erwähnt, soll der Winkel φ, der als letzte verfügbare Größe übrig geblieben ist, so bestimmt werden, daß der Koeffizient von xy der transformierten Gleichung verschwindet. Setzt man ein für:

$$x\colon\ x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y\colon\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

dann geht die Gleichung (1) dieses Paragraphen über in folgende:

(2) $(x^2+y^2)^2+x^2[\Omega_2+\Omega_2'(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-2\Omega_2''\sin\varphi\cos\varphi]$
$+2xy[\Omega_2''(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+2\Omega_2'\sin\varphi\cos\varphi]+y^2[\Omega_2-\Omega_2'(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$
$+2\Omega_2''\sin\varphi\cos\varphi]+4x[A_{10}\cos\varphi-A_{01}\sin\varphi]+4y[A_{10}\sin\varphi+A_{01}\cos\varphi]$
$+O_4=0.$

Setzt man den Koeffizienten von xy gleich null, so führt dies auf die Gleichung:

(3) $$\Omega_2''\cos 2\varphi + \Omega_2'\sin 2\varphi = 0.$$

Hieraus folgt:

(4) $$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{\Omega_2''}{\Omega_2'}.$$

(5) $$\begin{cases} \sin 2\varphi = -\dfrac{\Omega_2''}{\pm\sqrt{\Omega_2''^2+\Omega_2'^2}} = -\dfrac{\Omega_2''}{\pm O_2} = -\dfrac{\Omega_2''}{\Omega_2'''}, \\ \cos 2\varphi = \dfrac{\Omega_2'}{\pm\sqrt{\Omega_2''^2+\Omega_2'^2}} = \dfrac{\Omega_2'}{\pm O_2} = \dfrac{\Omega_2'}{\Omega_2'''}. \end{cases}$$

Ist φ eine Lösung der Gleichung (4), dann ist auch infolge der Periodizität der Tangensfunktion $\varphi+\frac{\pi}{2}$, weiter $\varphi+\pi$, $\varphi+\frac{3\pi}{2}$ je eine Lösung. Um Eindeutigkeit zu erzielen, soll der Winkel 2φ konkav, d. h. φ spitz angenommen werden. Es ist also $\sin 2\varphi$ auf alle Fälle positiv. Daraus ergibt sich die Vorzeichenbeziehung:

$$\operatorname{sgn}\Omega_2''' = \operatorname{sgn}\Omega_2'',$$

denn es soll gesetzt werden: $\Omega_2''' = \pm O_2$, wo O_2 gleich dem absoluten Betrag der Wurzel ist, also:

$$O_2 = \left| \sqrt{\Omega_2'^2 + \Omega_2''^2} \right|.$$

Geht man nun mit den Werten von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ und $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ ein in die übrigen Koeffizienten der transformierten Gleichung (2), so erhält man nach einigen Umrechnungen folgende Form der Kurvengleichung:

(6)
$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2''')x^2+(\Omega_2-\Omega_2''')y^2+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}\left[A_{10}\sqrt{\Omega_2'''+\Omega_2'}\right.$$
$$\left.-A_{01}\sqrt{\Omega_2'''-\Omega_2'}\right]x+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}\left[A_{10}\sqrt{\Omega_2'''-\Omega_2'}+A_{01}\sqrt{\Omega_2'''+\Omega_2'}\right]y+O_4=0.$$

Da der Winkel φ als spitzer Winkel festgesetzt wurde, so kommt nur das Pluszeichen vor der Wurzel in Betracht.

Die Gleichung (6) soll als Normalform der allgemeinen bizirkularen Quartik bezeichnet werden.

Noch elegantere Formen nehmen die Gleichungen spezieller bizirkularer Kurven 4. Ordnung an, von denen hier die symmetrischen und die Mittelpunkts-Kurven in dieser Hinsicht untersucht werden sollen.

Die allgemeine bizirkulare Kurve erhält eine symmetrische Form, wenn entweder der Koeffizient von x oder der von y verschwindet. Man erhält dann Kurven, die zur y- resp. x-Achse symmetrisch sind. Im ersteren Falle folgt aus der Gleichung (2) die Bestimmungsgleichung:

$$A_{10}\cos\varphi = A_{01}\sin\varphi,$$

oder:

(7)
$$A_{10} = A_{01}\cdot\operatorname{tg}\varphi = A_{01}\cdot\varkappa.$$

Hierin ist, weil:
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'}}{\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'}},$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'}}{\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'}}.$$

Die Gleichung (7) soll das Symmetriekriterium genannt werden. In dem Falle, daß die Kurve symmetrisch zur x-Achse ist, folgt:

$$A_{10}\sin\varphi = -A_{01}\cos\varphi,$$

$$\frac{A_{01}}{A_{10}} = -\operatorname{tg}\varphi;\quad \frac{A_{10}}{A_{01}} = -\frac{1}{\varkappa}.$$

Es wird sich nun die Gleichung der Kurve, wie folgt, vereinfachen. Setzt man $A_{10} = A_{01}\cdot\operatorname{tg}\varphi$ in dem Koeffizienten von y, der gleich

$$A_{10}\sin\varphi + A_{01}\cos\varphi$$

ist, ein, so kommt:

$$A_{10}\sin\varphi + A_{01}\cos\varphi = \frac{A_{01}}{\cos\varphi}.$$

Bildet man aber die orthogonale Invariante ω_3 von diesen speziellen Werten, so erhält man:

$$\omega_3 = \sqrt{A_{01}^2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)} = \frac{A_{01}}{\cos\varphi}.$$

Es stimmt also die orthogonale Invariante ω_3 mit dem Koeffizienten von y überein. Man hat hier nur zu beachten, daß ω_3 dasselbe Zeichen bekommt wie A_{01}, da nach der Annahme $\cos\varphi$ stets positiv ist. Analog wird für die zur x-Achse symmetrischen Kurven:

$$A_{10}\cos\varphi - A_{01}\sin\varphi = \frac{A_{10}}{\cos\varphi} = \omega_3.$$

Für das Vorzeichen gilt hier natürlich dasselbe. Die symmetrischen Kurven erhalten mithin folgende „Normalform“:

a) Symmetrie in bezug auf die x-Achse:

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2''')x^2+(\Omega_2-\Omega_2''')y^2+4\omega_3 x+O_4=0.$$

b) Symmetrie in bezug auf die y-Achse:

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2-\Omega_2''')x^2+(\Omega_2-\Omega_2''')y^2+4\omega_3 y+O_4=0.$$

Da $\cos\varphi$ für die hier in Betracht kommenden Werte ($\Omega_2'=0$, oder $\Omega_2''=0$) nicht null wird, so bleibt ω_3 stets endlich. (Ausführlicheres an der betreffenden Stelle in Kapitel II.)

Eine Kurvengruppe, die eine Behandlungsweise für sich erfordert, sind die kartesischen Ovale. Schon in § 3 war die Bedingung dafür gefunden, daß die allgemeinen bizirkularen Quartiken in kartesische Ovale übergehen. Notwendig ist hierzu das Verschwinden der orthogonalen Invariante O_2. Die Kurvengleichung (2) nimmt dann die Form an:

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2(x^2+y^2)+4(A_{10}\cos\varphi - A_{01}\sin\varphi)x+4(A_{10}\sin\varphi + A_{01}\cos\varphi)y+O_4=0.$$

Diese lehrt, daß die Glieder zweiter Ordnung einen gemeinsamen Koeffizienten haben, sich also wie die Glieder vierter Ordnung einer Drehung des Koordinatensystems gegenüber invariant verhalten. Ferner sieht man, da $\operatorname{tg}2\varphi$ für $O_2=0$ d. h. $\Omega_2'=\Omega_2''=0$ unbestimmt wird, daß dasselbe auch mit den anderen Größen: $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ der Fall ist. Mit anderen Worten heißt dies: Die Transformation, die zur Beseitigung des Gliedes xy aus der Gleichung dient, wird illusorisch. Das ist auch von selbst klar, denn dieses Glied fehlt bereits in der Gleichung (2). Das Unbestimmtwerden des Winkels φ sagt aber noch

etwas anderes aus, wenn das Symmetriekriterium herangezogen wird. Dieses hieß:

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\Omega_2''' - \Omega_2'}{\Omega_2''' + \Omega_2'}} = \frac{A_{10}}{A_{01}}, \text{ oder } -\frac{1}{\varkappa} = -\sqrt{\frac{\Omega_2''' + \Omega_2'}{\Omega_2''' - \Omega_2'}} = \frac{A_{10}}{A_{01}}.$$

Verschwindet also Ω_2''' und mithin Ω_2' und Ω_2'', dann wird:

$$\frac{A_{10}}{A_{01}} \text{ unbestimmt.}$$

Das heißt aber: Das Symmetriekriterium ist von den kartesischen Ovalen an sich erfüllt, mögen A_{10}, A_{01} Werte haben, welche sie wollen. Hieraus ergibt sich also das Resultat, daß die kartesischen Ovale stets symmetrische Kurven sind. Dasselbe folgt auch aus der Kurvengleichung. Denn da das Glied xy an sich fehlt und, wie bereits erwähnt, die Glieder 4. Ordnung und 2. Ordnung durch eine Drehung nicht geändert werden, so läßt sich hierdurch stets bewirken, daß entweder der Koeffizient von x oder der von y aus der Gleichung herausfällt. Setzt man den Koeffizienten von x gleich null, so folgt:

$$A_{10}\cos\varphi - A_{01}\sin\varphi = 0,$$

und hieraus: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_{10}}{A_{01}}$, $\sin\varphi = \frac{A_{10}}{\sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2}}$, $\cos\varphi = \frac{A_{01}}{\sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2}}$.

Trägt man diese Werte in den Koeffizienten von y ein, so wird dieser:

$$\frac{A_{10}^2 + A_{01}^2}{\sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2}} = \sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2} = \omega_3.$$

Wird wieder φ als konkaver Winkel festgesetzt, dann folgt die Vorzeichenrelation: $\operatorname{sgn}\omega_3 = \operatorname{sgn} A_{10}$.

Die Gleichung der Kurve schreibt sich endlich:

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2(x^2+y^2) + 4\omega_3 y + O_4 = 0.$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß die „Normalform“ der Gleichung des kartesischen Ovales, das die x-Achse als Symmetrieachse besitzt, lautet:

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2(x^2+y^2) - 4\omega_3 x + O_4 = 0.$$

Endlich sei noch erwähnt, daß sich als „Normalform“ der Gleichung der bizikularen Mittelpunktskurve die folgende ansprechen läßt:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')\,y^2 + O_4 = 0.$$

§ 8.

Die allgemeinen Invarianten A und B.

Mit Hilfe der gefundenen orthogonalen Invarianten nehmen die beiden bereits im § 2 erwähnten allgemeinen Invarianten eine sehr einfache Form an.

Legt man die allgemeine Gleichungsform (§ 2) zugrunde, dann erhält man für die Invariante A folgenden Ausdruck:

$$A = \frac{4}{3} a_{00} + 3(a_{20}^2 + a_{02}^2) + \frac{4}{3} a_{11}^2 + 2 a_{20} a_{02} + \frac{32}{3} a_{30} a_{03} a_{11}$$
$$- \frac{16}{3}(a_{30} a_{10} + a_{03} a_{01}) + \frac{4}{3}(a_{30}^2 a_{20} + a_{03}^2 a_{02}) - 4(a_{30}^2 a_{02} + a_{03}^2 a_{20}).$$

In orthogonalen Invarianten drückt sich diese Invariante A höchst einfach folgendermaßen aus:

$$A = 4 O_4 + \frac{2}{9} \Omega_2^2 - \frac{1}{9} \Omega_2'''^2.$$

Weil aber $\Omega_2'''^2 = O_2^2$ ist, so heißt dies auch:

$$A = 4 O_4 + \frac{2}{9} \Omega_2^2 - \frac{1}{9} O_2^2.$$

Die Invariante B ist, wie bereits gesagt, eine symmetrische Determinante sechster Ordnung. Wenn man die allgemeine Gleichung (§ 2) zugrunde legt, dann läßt sie sich so darstellen:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & a_{20} & \frac{1}{3}a_{03} & a_{30} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & a_{02} & a_{03} & \frac{1}{3}a_{30} & 0 \\ a_{20} & a_{02} & a_{00} & a_{01} & a_{10} & a_{11} \\ \frac{1}{3}a_{03} & a_{03} & a_{01} & a_{02} & a_{11} & \frac{1}{3}a_{30} \\ a_{30} & \frac{1}{3}a_{30} & a_{10} & a_{11} & a_{20} & \frac{1}{3}a_{03} \\ 0 & 0 & a_{11} & \frac{1}{3}a_{30} & \frac{1}{3}a_{03} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

Die Ausrechnung dieser Determinante ergibt einen ziemlich umfangreichen Ausdruck. Mittels der orthogonalen Invarianten jedoch folgt bei Zugrundelegung der Normalform die Form:

$$B = -\frac{4}{81} \Omega_2 \omega_3^2 + \frac{4}{81} \Omega_2'(A_{10}^2 - A_{01}^2) + \frac{8}{81} \Omega_2'' A_{10} A_{01}$$
$$+ \frac{2}{9 \cdot 27}(\Omega_2^2 - O_2^2) O_4 - \frac{1}{27 \cdot 108}(\Omega_2^4 - 2 \Omega_2^2 O_2^2 + O_2^4).$$

§ 9.

Die „Doppelpunktsinvarianten“.

Schon im Paragraph 2 wurde gesagt, daß die Diskriminante der Kurven vierter Ordnung dem Ausdrucke nach noch nicht vorliegt. Jedoch ist es für diesen speziellen Fall der Kurven vierter Ordnung möglich, die Bedingung für das Vorhandensein eines Doppelpunktes aufzustellen. Die Mittel hierzu gibt die Inversionsgeometrie der bizirkularen Quartiken an die Hand.[1])

1) Siehe Koenigs, Leçons de l'agrégation classique de mathématique. Paris 1892.

Ist $f(u, v, w) = 0$ die Gleichung der Deferentkurve in Linienkoordinaten und

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0$$

die Gleichung des Direktorkreises, dann ist die Gleichung der zyklischen Kurve:

$$f\left(x - \alpha,\ y - \beta,\ \delta - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) = 0$$

in Punktkoordinaten. In diesem Falle ist die Gleichung $f(u, v, w) = 0$ die eines Kegelschnittes und die dann sich ergebende Gleichung der zyklischen Kurve stellt eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung dar. Nimmt man, wie üblich, als Kegelschnittsgleichung:

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw + A_{33}w^2 = 0,$$

so resultiert:

$$f(x, y) = A_{33}(x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2)(A_{30}x + A_{03}y) + f^2(x, y) = 0.$$

Da die A_{ik} die bekannten Unterdeterminanten der Diskriminante sind, so folgt, daß nur dann die zyklische Kurve von der vierten Ordnung ist, wenn der Deferentkegelschnitt einen Mittelpunkt hat, d. h. eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. Denn für diese beiden Kegelschnittarten ist $A_{33} \neq 0$; der Fall $A_{33} = 0$ liefert ja bekanntlich eine Parabel.

Man kann also als Gleichung des Deferentkegelschnittes ansetzen:

$$au^2 \pm bv^2 - w^2 = 0.$$

Als Gleichung der zyklischen Kurve ergibt sich alsdann:

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(\delta + a)x^2 - 4(\delta \pm b)y^2 + 8a\alpha x \pm 8b\beta y + 4(\delta^2 - a\alpha^2 \mp b\beta^2) = 0.$$

Diese Gleichung ist mit der Normalform (§ 7) in Beziehung zu setzen, die zu diesem Zwecke geschrieben werden möge in der Form:

$$(x^2 + y^2)^2 + B_{20}x^2 + B_{02}y^2 + 4B_{10}x + 4B_{01}y + O_4 = 0.$$

Dabei ist gesetzt:

$$\Omega_2 + \Omega_2''' = B_{20},$$

$$\Omega_2 - \Omega_2''' = B_{02},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\Omega_2'''}}\left[A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'}\right] = B_{10},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\Omega_2'''}}\left[A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'}\right] = B_{01}.$$

Es ergeben sich, wenn man die Koeffizienten entsprechender Glieder einander gleich setzt, folgende Bestimmungsgleichungen der Größen a, b, α, β und δ:

$$B_{20} = -4(\delta + a) \text{ oder } -\left(\delta + \frac{B_{20}}{4}\right) = a,$$

$$B_{02} = -4(\delta \pm b) \text{ oder } \mp\left(\frac{B_{02}}{4} + \delta\right) = b,$$
$$B_{10} = 2a\alpha,$$
$$B_{01} = \pm 2b\beta,$$
$$\frac{O_4}{4} = \delta^2 - a\alpha^2 \mp b\beta^2.$$

Setzt man die sich aus den ersten vier Gleichungen ergebenden Werte für a, b, α, β in die fünfte ein, dann resultiert eine Gleichung in δ, die folgendermaßen lautet:

$$(1) \qquad O_4 = 4\delta^2 + \frac{{B_{10}}^2}{\left(\frac{B_{20}}{4} + \delta\right)} + \frac{{B_{01}}^2}{\left(\frac{B_{02}}{4} + \delta\right)}.$$

Schafft man die Nenner fort, dann kommt:

$$(2) \quad \delta^4 + \delta^3\left(\frac{B_{20}+B_{02}}{4}\right) + \delta^2\left(\frac{B_{20}B_{02}}{16} - \frac{O_4}{4}\right) + \delta\left[\frac{{B_{10}}^2+{B_{01}}^2}{4} - \frac{B_{20}+B_{02}}{16}\cdot O_4\right]$$
$$+ \frac{{B_{10}}^2 B_{02} + {B_{01}}^2 B_{20}}{16} - \frac{B_{20}B_{02}O_4}{64} = 0.$$

Diese Gleichung möge kurz geschrieben werden:

$$(3) \qquad g(\delta) = \delta^4 + a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d = 0.$$

Setzt man für B_{20}, B_{02}, B_{10}, B_{01} ihre Werte ein, dann nehmen die Koeffizienten der letzten Gleichung folgende Gestalt an:

$$a = \frac{\Omega_2}{2},$$
$$b = \frac{1}{16}({\Omega_2}^2 - {O_2}^2) - \frac{1}{4}O_4.$$
$$c = \frac{1}{4}{\omega_3}^2 - \frac{1}{8}\Omega_2 O_4,$$
$$d = \frac{1}{16}\left\{\Omega_2{\omega_3}^2 - ({A_{10}}^2 - {A_{01}}^2)\Omega_2' - 2\Omega_2'' A_{10}A_{01} - \frac{1}{4}O_4({\Omega_2}^2 - {O_2}^2)\right\}.$$

Nun ist die Existenz einer Doppelwurzel dieser Gleichung in δ das Kriterium dafür, daß die bizirkulare C_4 einen Doppelpunkt hat. Es muß also die Diskriminante der Gleichung vierten Grades $g(\delta) = 0$ verschwinden. Dieses Kriterium für das Vorhandensein eines Doppelpunktes läßt sich bei Benutzung der gewöhnlichen Darstellung der Diskriminante D so schreiben:

$$27D = 4A^3 - B^2 = 0.$$

Hierin sind bekanntlich A und B die beiden unabhängigen Invarianten der binären Form vierten Grades.

Auch für die noch mögliche geometrische Eigenschaft dieses Doppelpunktes, nämlich daß er zu einer Spitze wird, läßt sich die Bedingung aus obiger Invariante ableiten. Das Auftreten einer dreifachen Wurzel in der Gleichung $g(\delta) = 0$ bedingt, daß der Doppelpunkt eine Spitze wird. Da nun die Gleichung vierten Grades dann eine dreifache Wurzel hat, wenn ihre Invarianten $\mathcal{A}$ und B, jede für sich, verschwinden, so läßt sich dieses Resultat auch so formulieren: Ist $\mathcal{A} = B = 0$ erfüllt, dann hat die bizirkulare Kurve eine Spitze im Endlichen.

Es sind nun noch einige Worte über die Invarianteneigenschaft zu sagen, die die Größen D, $\mathcal{A}$, B bei den Kurven selbst besitzen. Da $D = O$ die Bedingung dafür ist, daß die Kurve einen Doppelpunkt hat, und da durch eine orthogonale Transformation hieran nichts geändert wird, so muß D eine orthogonale Invariante sein. Aber nicht nur D, sondern auch $\mathcal{A}$ und B selbst müssen orthogonale Invarianten sein, weil ihr Verschwinden den Übergang des Doppelpunktes in eine Spitze bewirkt, und die Spitze gegenüber der orthogonalen Transformation ebenfalls Invarianz besitzt.

Die Werte der Invarianten D, $\mathcal{A}$, B ergeben sich folgendermaßen: Ist

$$g(\delta) = \delta^4 + a\delta^3 + b\delta^2 + c\delta + d = 0$$

die Gleichung vierten Grades, dann ist, wie bereits angegeben:

$$27\,D = 4\,\mathcal{A}^3 - B^2$$

die Diskriminante. Hierin bedeuten $\mathcal{A}$ und B folgende Funktionen der Koeffizienten:

$$\mathcal{A} = b^2 - 3ac + 12d$$

$$B = 27a^2d + 27c^2 + 2b^3 - 72bd - 9abc.$$

Setzt man hierin für a, b, c, d die oben angegebenen Werte, dann erhält man:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{32}\left\{\frac{1}{8}\Omega_2{}^4 - \frac{1}{4}\Omega_2{}^2 O_2{}^2 + \frac{1}{8}O_2{}^4 + 2\,O_4{}^2 - \Omega_2{}^2 O_4 + 7\,O_4 O_2{}^2 + 12\,\Omega_2\omega_3{}^2 - 24\,\Omega_2{}'(A_{10}{}^2 - A_{01}{}^2) - 48\,\Omega_2{}''A_{10}A_{01}\right\}$$

und nach längeren Rechnungen:

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{64}\Big\{ & \frac{9}{2}\Omega_2{}^3\omega_3{}^2 - \frac{3}{8}\Omega_2{}^4 O_1 - \frac{15}{4}\Omega_2{}^2 O_2{}^2 O_4 + 108\,\omega_3{}^4 - 18\,\Omega_2\,\omega_3{}^2 O_4 \\ & + \frac{3}{2}\Omega_2{}^2 O_4{}^2 + \frac{1}{32}\Omega_2{}^6 - \frac{3}{32}\Omega_2{}^4 O_2{}^2 + \frac{3}{32}\Omega_2{}^2 O_2{}^4 - \frac{1}{32}O_2{}^6 \\ & + \frac{33}{8}O_2{}^4 O_4 + \frac{33}{2}O_2{}^2 O_4{}^2 - 2\,O_4{}^3 + \frac{45}{2}\Omega_2\,\omega_3{}^2 O_2{}^2 \\ & - 9(A_{10}{}^2 - A_{01}{}^2)\Omega_2{}'\Omega_2{}^2 - 18(A_{10}{}^2 - A_{01}{}^2)\Omega_2{}'O_2{}^2 \\ & - 72(A_{10}{}^2 - A_{01}{}^2)\Omega_2{}'O_4 - 18\,A_{10}A_{01}\Omega_2{}''\Omega_2{}^2 - 36\,A_{10}A_{01}\Omega_2{}''O_2{}^2 \\ & - 144\,A_{10}A_{01}\Omega_2{}''O_4\Big\}. \end{aligned}$$

Die Invariante $D = \frac{4}{27} A^3 - \frac{1}{27} B^2$ ist wegen des sehr umfangreichen Ausdruckes nicht berechnet worden.

Nachdem nun die Kriterien für die Existenz eines Doppelpunktes und einer Spitze aufgefunden sind, soll in einem zweiten Kapitel, gleichsam als Anwendung der gefundenen orthogonalen Invarianten, eine Klassifikation der bizirkularen Kurven mit Hilfe dieser Invarianten vorgenommen werden.

Kapitel II.

Klassifikation der bizirkularen Kurven vierter Ordnung mit Hilfe der gefundenen Invarianten.

§ 10.

Einleitende Betrachtungen.

Die bizirkularen Kurven vierter Ordnung haben, wie bereits öfter erwähnt, die unendlichen Kreispunkte zu Doppelpunkten. Letztere sind mithin imaginär, und da die hier behandelten Kurven reell sind, so sind sie konjugiert imaginär. Die Unterscheidung in Knotenpunkt und isolierten Punkt, die man bei den reellen Doppelpunkten zu machen hat, wird hier hinfällig, da die Doppelpunkte an sich imaginär sind, und also die Tangenten stets imaginär sind, ob ein Knoten- oder ein isolierter Punkt vorliegt. Übrig bleibt die Unterscheidung in „Doppelpunkt“ und Spitze, die ja bereits in § 3 behandelt ist.

Da die beiden unendlichen Doppelpunkte, welche die bizirkularen Kurven vierter Ordnung an sich haben, die einzigen unendlich fernen Punkte der Kurve sind und sein können, so folgt hieraus, daß die Kurvenzüge ganz im Endlichen verlaufen müssen und daher geschlossen sein müssen. Was die Anzahl dieser Kurvenzweige betrifft, so läßt sich hierüber folgendes sagen. Faßt man die Ovale im Zeuthenschen[1]) Sinne, dann ergibt sich, daß Kurven gerader Ordnung überhaupt nur aus „Ovalen“ bestehen können, und daß die Anzahl der „Teile“ in diesem Sinne allgemein um eins größer ist als der Defekt der Kurve. Nun ist der Defekt oder auch das Geschlecht der bizirkularen Kurven gleich eins. Mithin ergibt sich, daß die bizirkularen Kurven höchstens aus zwei „Ovalen“ bestehen können. Da diese „Ovale“ im Endlichen

1) Siehe „Mathematische Annalen“, Band 7, Seite 410 ff.

verlaufen müssen, so stimmen sie mit dem überein, was man gewöhnlich als Oval bezeichnet.

Nach der allgemeinen Theorie sind bei den Kurven vierter Ordnung drei Doppelpunkte möglich. Nun sind bereits zwei Doppelpunkte a priori vorhanden, so daß die bizirkularen Kurven vierter Ordnung nur noch einen Doppelpunkt haben können, der dann notwendig im Endlichen liegen muß. Und es kann dies nur ein Doppelpunkt (Knoten- oder isolierter Punkt) resp. natürlich eine Spitze sein, weil eine höhere bei den Kurven vierter Ordnung bereits mögliche Singularität infolge der „Invariabilität“ der beiden unendlichen Doppelpunkte ausgeschlossen ist.

Damit ist gezeigt, daß die Klassifizierung, die hier vorgenommen werden soll, eine vollständige ist in bezug auf die Hauptgruppen, während im einzelnen noch hier und da Lücken vorhanden sein werden, weil nur das Verschwinden, nicht aber die Vorzeichen der einzelnen Invarianten berücksichtigt werden. Das Vorzeichen wird allerdings nur das Kriterium liefern, ob die betreffende Kurve reell oder imaginär ist.

Es ergibt sich somit folgende Einteilung der Kurven in:

1. Kurven ohne Singularität im Endlichen. (§ 11.)
2. Kurven mit Doppelpunkt im Endlichen. (§ 12.)
3. Kurven mit Spitze im Endlichen. (§ 13.)
4. Degenerierte Kurven. (§ 14.)

§ 11.

Allgemeine bizirkulare Kurven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt im Endlichen.

Die Kurven ohne Doppelpunkt haben das allgemeine Kriterium: $D \neq 0$. Sie lassen sich weiter zergliedern in folgende Gruppen:

I. allgemeine Kurven,
II. symmetrische Kurven,
III. Kurven, die den Fundamentalpunkt als Punkt in sich enthalten,
IV. Mittelpunktskurven.

Gruppe I. $D \neq 0$.

a) Ihre Gleichungsform ist:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y + O_4 = 0.$$

Je nachdem man nun setzt: $\Omega_2'' = 0$ oder $\Omega_2' = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$, $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$, erhält man folgende Unterabteilungen:

b) $\Omega_2'' = 0$.

Es wird dann:

$$\begin{array}{l|l|l} \cos 2\varphi = 1 & \cos\varphi = 1 & \\ \sin 2\varphi = 0 & \sin\varphi = 0 & \end{array} \quad \varphi = 0.$$

Die Gleichung schreibt sich:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')\,y^2 + 4A_{10}\,x + 4A_{01}\,y + O_4 = 0.$$

c) $\Omega_2' = 0$.

In diesem Falle wird:

$$\begin{array}{l|l|l} \sin 2\varphi = 1 & \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & \\ \cos 2\varphi = 0 & \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} & \end{array} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Damit ist gezeigt, daß $\omega_3 = \dfrac{A_{10}}{\cos\varphi}$ nicht null wird (§ 7) für die hier in Betracht kommenden Werte $\Omega_2'' = 0$ oder $\Omega_2' = 0$.

Trägt man obige Vereinfachungen ein, so nimmt die Gleichung dieser Kurve die Form an:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')\,y^2 + 2\sqrt{2}\,(A_{10} - A_{01})x + 2\sqrt{2}\,(A_{10} - A_{01})\,y + O_4 = 0.$$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''\,(x^2-y^2) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}\,(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})\,x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}\,(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})\,y + O_4 = 0.$$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'\,(x^2-y^2) + 4A_{10}\,x + 4A_{01}\,y + O_4 = 0.$$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''\,(x^2-y^2) + 2\sqrt{2}\,(A_{10} - A_{01})x + 2\sqrt{2}\,(A_{10} + A_{01})\,y + O_4 = 0.$$

Gruppe II: $D \neq 0$, außerdem ein Symmetriekriterium erfüllt.

1. Kurven, symmetrisch zur y-Achse: $\dfrac{A_{10}}{A_{01}} = \sqrt{\dfrac{\Omega_2''' - \Omega_2'}{\Omega_2''' + \Omega_2'}}$.

a) Allgemeine Form:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')\,y^2 + 4\omega_3\,y + O_4 = 0.$$

Hierin ist bekanntlich: $\omega_3 = \dfrac{A_{01}}{\cos\varphi}$.

b) $\Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')\,y^2 + 4A_{01}\,y + O_4 = 0.$$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')\,y^2 + 4\sqrt{2}\,A_{01}\,y + O_4 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''\,(x^2-y^2) + 4\,\omega_3\,y + O_4 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'\,(x^2-y^2) + 4\,A_{01}\,y + O_4 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''\,(x^2-y^2) + 4\sqrt{2}\,A_{01}\,y + O_4 = 0.$

2) Kurven, symmetrisch zur x-Achse: $\dfrac{A_{10}}{A_{01}} = -\sqrt{\dfrac{\Omega_2''' + \Omega_2'}{\Omega_2''' - \Omega_2'}}$.

a) Allgemeine Form:
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')\,y^2 + 4\,\omega_3\,x + O_4 = 0.$

Es ist: $\omega_3 = \dfrac{A_{10}}{\cos\varphi}$.

b) $\Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')\,y^2 + 4\,A_{10}\,x + O_4 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')\,y^2 + 4\sqrt{2}\,A_{10}\,x - O_4 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''\,(x^2-y^2) + 4\,\omega_3\,x + O_4 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'\,(x^2-y^2) + 4\,A_{10}\,x + O_4 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''\,(x^2-y^2) + 4\sqrt{2}\,A_{10}\,x \quad O_4 = 0.$

3. Kartesische Ovale.

Kriterium: $\Omega_2''' = 0, \quad D \neq 0.$

A. Ovale, symmetrisch zur y-Achse.

a) $(x^2+y^2)^2 + \Omega_2\,(x^2+y^2) + 4\,\omega_3\,y + O_4 = 0.$

b) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + 4\,\omega_3\,y + O_4 = 0.$

B. Ovale, symmetrisch zur x-Achse.

a) Allgemein:
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2\,(x^2+y^2) + 4\,\omega_3\,x + O_4 = 0.$

b) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + 4\,\omega_3\,x + O_4 = 0.$

Gruppe III: Kurven durch den Fundamentalpunkt.

Kriterium: $O_4 = 0$; $D \neq 0$.

A. Allgemeine Kurven.

a) Allgemeine Form:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'}$$

$$- A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y = 0.$$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 - (\Omega_2 - \Omega_2')x^2 - (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{10}x + 4A_{01}y = 0.$$

c) $\Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 - (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 2\sqrt{2}(A_{10} - A_{01})x + 2\sqrt{2}(A_{10} + A_{01})y = 0.$$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 - \Omega_2'''(x^2-y^2) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y = 0.$$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 - \Omega_2'(x^2-y^2) + 4A_{10}x - 4A_{01}y = 0.$$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2-y^2) + 2\sqrt{2}(A_{10} - A_{01})x + 2\sqrt{2}(A_{10} + A_{01})y = 0.$$

B. Symmetrische Kurven.

1. Die y-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = \sqrt{\frac{\Omega_2''' - \Omega_2'}{\Omega_2''' + \Omega_2'}}$; $O_4 = 0$.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + 4\omega_3 y = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{01}y = 0.$$

c) $\Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 4\sqrt{2}A_{01}y = 0.$$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2-y^2) + 4\omega_3 y = 0.$$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2-y^2) + 4A_{01}y = 0.$$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2-y^2) + 4\sqrt{2}A_{01}y = 0.$$

2. Die x-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = -\sqrt{\frac{\Omega_2''' + \Omega_2'}{\Omega_2''' - \Omega_2'}}$; $O_4 = 0$.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + 4\omega_3 x = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{10}x = 0.$

c) $\Omega_2' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 4\sqrt{2}A_{10}x = 0.$

d) $\Omega_2 = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + 4\omega_3 x = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + 4A_{10}x = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + 4\sqrt{2}A_{10}x = 0.$

3. Kartesische Ovale durch den Fundamentalpunkt.
Kriterium: $\Omega_2''' = O_4 = 0.$

a) $\Omega_2 \neq 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2(x^2+y^2) + 4\omega_3 y = 0.$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2(x^2+y^2) + 4\omega_3 x = 0.$

b) $\Omega_2 = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + 4\omega_3 x = 0.$
$(x^2+y^2)^2 + 4\omega_3 y = 0.$

Gruppe IV: Mittelpunktskurven.
Kriterium: $\omega_3 = 0.$

Diese Kurven haben in ihrer allgemeinen Form die Gleichung:

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + O_1 = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + O_1 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + O_1 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + O_1 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + O_1 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0,$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + O_1 = 0.$

Der Fall $\Omega_2''' = 0$ liefert, wie man ohne weiteres sieht, eine zerfallene Kurve (2 konzentrische Kreise), und er wird deshalb in § 14 zu behandeln sein.

Damit ist die Anzahl der verschiedenen Arten von allgemeinen bizirkularen Kurven ohne Singularität im Endlichen erschöpft. Denn die noch mögliche Invariantenverbindung $\omega_3 = O_1 = 0$ bewirkt bereits die Existenz eines Doppelpunktes und führt daher auf Kurven, die zu den Doppelpunktskurven gehören und ihre Stelle im nächsten Paragraphen finden werden.

§ 12.

Bizirkulare Kurven vierter Ordnung mit Doppelpunkt im Endlichen.

Kriterium: $D = 0$, also: $4A^3 - B^2 = 0$.

Gruppe I: Allgemeine Kurven dieser Art.

Kriterium: $D = 0$.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'}$

$-A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y + O_4 = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{10}x + 4A_{01}y + O_4 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 2\sqrt{2}(A_{10} - A_{01})x$

$+ 2\sqrt{2}(A_{10} + A_{01})y + O_4 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x$

$+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y + O_4 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + 4A_{10}x + 4A_{01}y + O_4 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + 2\sqrt{2}(A_{10} - A_{01})x + 2\sqrt{2}(A_{10} + A_{01})y + O_4 = 0.$

Gruppe II: Symmetrische biz. Quartiken mit Doppelpunkt.

1. Die y-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = \sqrt{\frac{\Omega_2''' - \Omega_2'}{\Omega_2''' + \Omega_2'}}$.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + 4\omega_3 y + O_4 = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{01}y + O_4 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 4\sqrt{2}A_{01}y + O_4 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + 4\omega_3 y + O_1 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + 4A_{01}y + O_4 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + 4\sqrt{2}A_{01}y + O_4 = 0.$

2. Die x-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = -\sqrt{\frac{\Omega_2'' - \Omega_2'}{\Omega_2''' - \Omega_2'}}$.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + 4\omega_3 x + O_1 = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{10}x + O_1 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 4\sqrt{2}A_{10}x + O_1 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + 4\omega_3 x + O_4 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + 4A_{10}x + O_4 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + 4\sqrt{2}A_{10}x + O_4 = 0.$

3. Kartesische Ovale mit Doppelpunkt.
Kriterium: $D = 0$, $\Omega_2''' = 0$.

Dieser Typus von bizirkularen Kurven führt auch wohl den Namen: Pascalsche Schnecke.

Es lassen sich hier wieder die Unterabteilungen bilden:

a) $\Omega_2 \neq 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2(x^2+y^2) + 4\omega_3 x + O_1 = 0.$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2(x^2+y^2) + 4\omega_3 y + O_1 = 0.$

b) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + 4\omega_3 x + O_1 = 0.$
$(x^2+y^2)^2 + 4\omega_3 y + O_1 = 0.$

Über die Lage des Doppelpunktes bei den symmetrischen bizirkularen Kurven läßt sich ganz allgemein sagen, daß dieser Punkt auf der Symmetrieachse liegen muß. Dies folgt ohne weiteres daraus, daß der nach § 10 noch mögliche dritte Doppelpunkt, falls er nicht auf der Symmetrieachse läge, einen weiteren vierten bedingen würde, was mit der Theorie in Widerspruch stehen würde.

Gruppe III: Kurven mit Doppelpunkt, die durch den Fundamentalpunkt gehen.

Kriterium: $O_4 = D = 0$.

A. Allgemeine Kurven: $O_4 = D = 0$.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'}$

$- A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{10}x + 4A_{01}y = 0.$

c) $\Omega_2' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 2\sqrt{2}(A_{10} - A_{01})x$

$+ 2\sqrt{2}(A_{10} + A_{01})y = 0.$

d) $\Omega_2 = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x$

$+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + 4A_{10}x + 4A_{01}y = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + 2\sqrt{2}(A_{10} - A_{01})x + 2\sqrt{2}(A_{10} + A_{01})y = 0.$

B. Symmetrische Kurven.

1. Die y-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = \sqrt{\frac{\Omega_2''' - \Omega_2'}{\Omega_2''' + \Omega_2'}}$; $O_4 = 0.$

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + 4\omega_3 y = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{01}y = 0.$

c) $\Omega_2' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 + 4\sqrt{2}A_{01}y = 0.$

d) $\Omega_2 = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) + 4\omega_3 y = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) + 4A_{01}y = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0,$

$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) + 4\sqrt{2}A_{01}y = 0.$

2) Die x-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = -\sqrt{\frac{\Omega_2''' + \Omega_2'}{\Omega_2''' - \Omega_2'}}$.

a) Allgemeine Form dieser Art:
$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2''')x^2+(\Omega_2-\Omega_2''')y^2+4\omega_3 x=0.$

b) $\Omega_2''=0,$
$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2')x^2+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+4A_{10}x=0.$

c) $\Omega_2'=0,$
$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'''(x^2-y^2)+4\sqrt{2}A_{10}x=0.$

d) $\Omega_2=0,$
$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'''(x^2-y^2)+4\omega_3 x=0.$

e) $\Omega_2=\Omega_2'=0,$
$(x^2+y^2)^2+\Omega_2''(x^2-y^2)+4\sqrt{2}A_{10}x=0.$

f) $\Omega_2=\Omega_2''=0,$
$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'(x^2-y^2)+4A_{10}x=0.$

3. Kartesische Ovale mit Doppelpunkt, welche den Fundamentalpunkt enthalten.

Kriterium: $\Omega_2''' = O_4 = 0;\ D=0.$

a) $\Omega_2 \neq 0,$
$(x^2+y^2)^2+\Omega_2(x^2+y^2)+4\omega_3 x=0.$
$(x^2+y^2)^2+\Omega_2(x^2+y^2)+4\omega_3 y=0.$

In diesem Falle ergibt sich ω_3^2 als Wurzel einer Gleichung dritten Grades in ω_3^2, deren Koeffizienten Funktionen von Ω_2 sind.

Ist $\Omega_2=0$ erfüllt, dann zeigt die Rechnung, daß für D der Wert resultiert:

$$D = -27\omega_3^4$$
$$= -\frac{27}{256}\omega_3^8.$$

Da nun $D=0$ sein soll, so folgt hieraus auch $\omega_3=0$. Die Kurvengleichung repräsentiert also bereits einen Ausnahmefall. Denn es wird:

$$f(x,y) \equiv (x^2+y^2)^2 = 0,$$

d. h. die Kurve zerfällt in ein doppelt zu zählendes Nullstrahlenpaar.

Gruppe IV: Mittelpunktskurven mit Doppelpunkt.

Wie am Schluß der Gruppe III dieses Paragraphen, so tritt auch hier bereits wieder im Vergleiche zum vorigen Paragraphen eine Abweichung ein. Denn sollen die Kurven einen Mittelpunkt haben, so müssen sie zu den beiden Koordinatenachsen symmetrisch sein. Es muß mithin der im Endlichen noch mögliche dritte Doppelpunkt mit

dem Mittelpunkt zusammenfallen. Würde er dies nicht tun, so wäre hierdurch wenigstens noch ein weiterer (vierter) Doppelpunkt bedingt, was aber bei einer nicht degenerierten bizirkularen C_4 der Theorie widerspricht. Diese rein geometrische Betrachtung berechtigt also zu dem algebraischen Schluß:

$$O_4 = 0,$$

so daß, da auch $\omega_3 = 0$ ist, die Gleichung dieser Kurvengruppe schließlich die Gestalt annimmt:

$$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 = 0.$$

Trägt man die Bedingungen $\omega_3 = O_4 = 0$ in die Invarianten A, B ein, so ergibt sich:

$$A = b^2 = \frac{1}{256}(\Omega_2^4 - 2\Omega_2^2\Omega_2'''^2 + \Omega_2'''^4),$$

oder da $\Omega_2'''^2 = O_2^2$ ist:

$$A = \frac{1}{256}(\Omega_2^4 - 2\Omega_2^2 O_2^2 + O_2^4)$$

und

$$B = \frac{2}{16^3}(\Omega_2^6 - 3\Omega_2^4 O_2^2 + 3\Omega_2^2 O_2^4 - O_2^6).$$

Die Invariante D wird folgendermaßen dargestellt:

$$27D = 4b^6 - 4b^6 \equiv 0.$$

Man sieht zugleich, daß $D = 0$ in diesem Falle identisch erfüllt wird.

Nach dem bisher benutzten Einteilungsprinzip ergeben sich die folgenden speziellen Mittelpunktskurven mit Doppelpunkt:

a) Allgemeine Form:

$$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 = 0.$$

Um auf die schon bekannten reellen Kurven dieser Art zu kommen, hat man die Invarianten folgenden Bedingungen zu unterwerfen:

1) $\Omega_2 < O$; $O < \Omega_2''' < |\Omega_2|$.

Dann ergibt sich, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} \Omega_2''' - \Omega_2 &= a^2 \\ +|(\Omega_2''' + \Omega_2)| &= b^2, \end{aligned}$$

als Gleichung der Kurve:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2y^2 + b^2x^2.$$

Hierin ist, wie man sich leicht überzeugen kann, $a^2 > b^2$. Die Gleichung stellt also die elliptische Lemniskate von Booth dar.[1])

---

1) Siehe: Loria, Spezielle ebene algebraische und transzendente Kurven, 2. Auflage 1910, Teil I, Seite 134.

2) $\Omega_2''' > |\Omega_2| > 0$, wo Ω_2 entweder positiv oder negativ sein kann.

Ist $\Omega_2 > 0$, so folgt, wenn man wieder $a^2 = \Omega_2''' - \Omega_2$, $b^2 = \Omega_2''' + \Omega_2$ einführt, die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 - b^2 x^2.$$

Und zwar ist in diesem Falle: $a^2 < b^2$.

Ist $\Omega_2 < 0$, dann erhält man ebenfalls die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 y^2 - b^2 x^2,$$

in der dann aber: $a^2 > b^2$ ist. Beide Kurven werden bezeichnet als hyperbolische Lemniskaten von Booth.

b) $\Omega_2'' = 0$,

$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,

$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')y^2 = 0.$

Die Fälle b) und c) stellen einfachere Formen der unter a) angeführten Kurven dar.

d) $\Omega_2 = 0$,

$(x^2 + y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2 - y^2) = 0.$

Diese Gleichung stellt die gewöhnlich als Bernoullische Lemniskate bezeichnete Kurve dar.

e) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$(x^2 + y^2)^2 + \Omega_2''(x^2 - y^2) = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$(x^2 + y^2)^2 + \Omega_2'(x^2 - y^2) = 0.$

e) und f) sind speziellere Formen der Bernoullischen Lemniskate. $\Omega_2 = \Omega_2''' = 0$ liefert wieder ein doppelt zu zählendes Nullstrahlenpaar der Ebene.

§ 13.

Bizirkulare Kurven vierter Ordnung mit Spitze im Endlichen.

Allgemeines Kriterium: $A = B = 0$.

Gruppe I: Allgemeine Kurven mit Spitze.

a) Allgemeine Form:

$$(x^2 + y^2) + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'})x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})y + O_4 = 0.$$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{10}x + 4A_{01}y + O_4 = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2-\Omega_2'')x^2+(\Omega_2-\Omega_2'')y^2+2\sqrt{2}(A_{10}-A_{01})x + 2\sqrt{2}(A_{10}+A_{01})y+O_4=0.$$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'''(x^2-y^2)+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2'''+\Omega_2'}-A_{01}\sqrt{\Omega_2'''-\Omega_2'})x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2'''-\Omega_2'}+A_{01}\sqrt{\Omega_2'''+\Omega_2'})y+O_4=0.$$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'(x^2-y^2)+4A_{10}x+4A_{01}y+O_4=0.$$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2''(x^2-y^2)+2\sqrt{2}(A_{10}-A_{01})x+2\sqrt{2}(A_{10}+A_{01})y+O_4=0.$$

Gruppe II: Symmetrische Kurven.

Kriterium: $A=B=0$ und ein Symmetriekriterium erfüllt.

A. Die y-Achse ist die Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}}=\sqrt{\frac{\Omega_2'''-\Omega_2'}{\Omega_2'''+\Omega_2'}}$.

Von dieser ganzen Gruppe II von Kurven läßt sich wiederum sagen, daß ihre Singularität (Spitze) ein Punkt der Symmetrieachse sein muß.

a) Allgemeine Form:

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2''')x^2+(\Omega_2-\Omega_2''')y^2+4\omega_3 y+O_4=0.$$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2')x^2+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+4A_{01}y+O_4=0.$$

c) $\Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2'')x^2+(\Omega_2-\Omega_2'')y^2+4\sqrt{2}A_{01}y+O_4=0.$$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'''(x^2-y^2)+4\omega_3 y+O_4=0.$$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2'(x^2-y^2)+4A_{01}y+O_4=0.$$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+\Omega_2''(x^2-y^2)+4\sqrt{2}A_{01}y+O_4=0.$$

B. Die x-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}}=-\sqrt{\frac{\Omega_2'''+\Omega_2'}{\Omega_2'''-\Omega_2'}}$.

a) Allgemeine Form:

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2''')x^2+(\Omega_2+\Omega_2''')y^2+4\omega_3 x+O_4=0.$$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2+(\Omega_2+\Omega_2')x^2+(\Omega_2-\Omega_2')y^2+4A_{10}x+O_4=0.$$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')\,y^2 + 4\sqrt{2}\,A_{10}x + O_4 = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''\,(x^2-y^2) + 4\,\omega_3 x + O_4 = 0.$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'\,(x^2-y^2) + 4\,A_{10}x + O_4 = 0.$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2''\,(x^2-y^2) + 4\sqrt{2}\,A_{10}x + O_4 = 0.$

C. Kartesische Ovale mit Spitze.

Kriterium: $\Omega_2''' = 0$, $\mathcal{A} = B = 0$.

a) Allgemeine Form:
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2\,(x^2+y^2) + 4\,\omega_3 x + O_4 = 0.$
$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2\,(x^2+y^2) + 4\,\omega_3 y + O_4 = 0.$
In diesem Falle drücken sich ω_3 und O_4 als Funktionen von Ω_2 aus.

b) $\Omega_2 = 0$.
Setzt man $\Omega_2''' = 0$ und auch $\Omega_2 = 0$ in die Invarianten $\mathcal{A}$, B ein, so ergibt sich:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16}\,O_4{}^2$$

$$B = \frac{27}{16}\,\omega_3{}^4 + \frac{1}{32}\,O_4{}^3.$$

Da $\mathcal{A} = B = 0$ sein soll, so folgt hieraus: $O_4 = \omega_3 = 0$.
Der Fall $\Omega_2 = \Omega_2''' = \mathcal{A} = B = 0$ bewirkt also bereits wieder eine Degeneration der bizirkularen Kurven in ein doppelt zu zählendes Nullstrahlenpaar.

Gruppe III: Bizirkulare Kurven mit Spitze, die außerdem durch den Fundamentalpunkt gehen.

Kriterium: $O_4 = 0$ und $\mathcal{A} = B = 0$.

A. Allgemeine Kurven dieser Art.

a) $(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')\,y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'}$
$A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})\,x + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2''' - \Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2''' + \Omega_2'})\,y = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')\,y^2 + 4\,A_{10}x + 4\,A_{01}y = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'')\,x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'')\,y^2 + 2\sqrt{2}\,(A_{10} - A_{01})\,x$
$+ 2\sqrt{2}\,(A_{10} + A_{01})\,y = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2-y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2-y^2) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2'''+\Omega_2'} - A_{01}\sqrt{\Omega_2'''-\Omega_2'})x$$
$$- \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega_2'''}}(A_{10}\sqrt{\Omega_2'''-\Omega_2'} + A_{01}\sqrt{\Omega_2'''+\Omega_2'})y = 0.$$

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$(x^2-y^2)^2 + \Omega_2'(x^2-y^2) + 4A_{10}x + 4A_{01}y = 0.$$

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$,

$$(x^2-y^2)^2 + \Omega_2''(x^2-y^2) + 2\sqrt{2}(A_{10}-A_{01})x + 2\sqrt{2}(A_{10}+A_{01})y = 0.$$

B. Symmetrische Kurven mit Spitze, die außerdem den Fundamentalpunkt enthalten.

1. Die y-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = \sqrt{\frac{\Omega_2''' - \Omega_2'}{\Omega_2''' + \Omega_2'}}$.

a) Allgemeine Form:

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')y^2 + 4\omega_3 y = 0.$$

b) $\Omega_2'' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4A_{01}y = 0.$$

c) $\Omega_2' = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2')y^2 + 4\sqrt{2}A_{01}y = 0.$$

d) $\Omega_2 = 0$,

$$(x^2+y^2)^2 + \Omega_2'''(x^2-y^2) + 4\omega_3 y = 0.$$

Ist e) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$ oder f) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$, so tritt wieder gegenüber der entsprechenden Stelle des vorhergehenden Paragraphen eine Abweichung ein, indem nämlich für A und B unter obiger Annahme folgende Werte resultieren:

e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$,

$$A = \frac{1}{256}\Omega_2'^4 - \frac{12}{16}\Omega_2'\omega_3^2,$$

$$B = \frac{27}{16}\omega_3^4 - \frac{2}{16^3}\Omega_2'^6 - \frac{72}{16^2}\Omega_2'^3\omega_3^2.$$

Da nun $A = B = 0$ sein soll, so folgt:

$$A = 0 = \frac{1}{16}\Omega_2'^3 - 12\omega_3^2; \quad \omega_3^2 = \frac{1}{12\cdot 16}\Omega_2'^3$$

und, da ja $\Omega_2' \neq 0$ vorausgesetzt, auch:

$$B = 0 = 27\omega_3^4 - \frac{2}{16^2}\Omega_2'^6 - \frac{9}{2}\Omega_2'^3\omega_3^2.$$

Setzt man den Wert von ω_3^2 ein in die letzte Gleichung, so resultiert

$$B = 0 = -\frac{125}{6}\Omega_2'^6.$$

Dies ist nur möglich, wenn $\Omega_2''^6 = 0$, also auch $\Omega_2' = 0$. Da nun

$$\omega_3^2 = \frac{1}{16 \cdot 12} \Omega_2''^3$$

ist, so folgt auch $\omega_3^2 = 0$.

f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$.

Unter dieser Voraussetzung kommt man auf folgende den vorigen analoge Ausdrücke:

$$A = \frac{1}{256} \Omega_2''^4 - \frac{12}{16} \Omega_2'' \omega_3^2,$$

$$B = \frac{27}{16} \omega_3^4 - \frac{2}{16^3} \Omega_2''^6 - \frac{72}{16^2} \Omega_2''^3 \omega_3^2.$$

Die Rechnung ergibt wieder: $\omega_3 = \Omega_2'' = 0$.

In beiden Fällen e) und f) wird also die Gleichung der Kurve:

$$(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

2. Die x-Achse ist Symmetrieachse: $\frac{A_{10}}{A_{01}} = -\sqrt{\frac{\Omega_2''' + \Omega_2'}{\Omega_2''' - \Omega_2'}}$.

a) Allgemeine Form:
$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''') x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''') y^2 + 4 \omega_3 x = 0.$

b) $\Omega_2'' = 0$,
$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2') x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2') y^2 + 4 A_{10} x = 0.$

c) $\Omega_2' = 0$,
$(x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2'') x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2'') y^2 + 4\sqrt{2} A_{10} x = 0.$

d) $\Omega_2 = 0$,
$(x^2 + y^2)^2 + \Omega_2''' (x^2 - y^2) + 4 \omega_3 x = 0.$

Für die Kurven unter e) $\Omega_2 = \Omega_2'' = 0$ und f) $\Omega_2 = \Omega_2' = 0$ gelten dieselben Bemerkungen, die an der entsprechenden Stelle B. 1 dieses Abschnittes gemacht sind.

3. Kriterium: $\Omega_2''' = O_4 = 0$.

Führt man die Substitution $\Omega_2''' = O_4 = 0$ aus, so ergeben sich für A und B folgende Werte:

(1) $$A = \frac{1}{256} \Omega_2^3 + \frac{3}{8} \omega_3^2 = 0,$$

(2) $$B = \frac{27}{4} \omega_3^2 \Omega_2^3 + 27 \omega_3^4 + \frac{2}{16^2} \Omega_2^6 - \frac{9}{2} \Omega_2^3 \omega_3^2 - \frac{9}{4 \cdot 2} \Omega_2^3 \omega_3^2 = 0.$$

Aus (1) folgt: $$\omega_3^2 = -\frac{1}{16 \cdot 6} \Omega_2^3$$

und, wenn man diesen Wert für ω_3^2 in (2) einsetzt:

$$B = 0 = -\frac{1}{4} \Omega_2^6.$$

Die vorstehende Gleichung sagt also aus, daß $\Omega_2 = 0$ und dann auch $\omega_3 = 0$ ist.

Als Resultat ergibt sich also, daß die ganze Kurvengattung, die man wohl als „kartesische Ovale durch den Fundamentalpunkt“ bezeichnen könnte, degeneriert, wenn sie eine Spitze besitzen soll.

Gruppe IV: Mittelpunktskurven mit Spitze.

Kriterium: $\omega_3 = O_4 = 0$, $A = B = 0$.

Schon der Paragraph 12 (Gruppe IV) lehrte, daß eine bizirkulare Mittelpunktskurve nur dann einen zweifachen Punkt (in dem dortigen Falle einen Knoten- oder isolierten Punkt) besitzen kann, wenn dieser zugleich mit dem Mittelpunkt vereinigt ist. Dasselbe gilt natürlich auch für den Fall, daß die Kurve eine Spitze besitzt, die ja doch auch ein zweifacher Punkt ist. Eine geometrische Erwägung zeigt, daß diese hier zu behandelnden Kurven notwendig imaginär sein müssen. Daß dies sich tatsächlich so verhält, läßt sich algebraisch in folgender Weise dartun.

Da $\omega_3 = O_4 = 0$ ist, so lautet die Gleichung allgemein:

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + \Omega_2''')\, x^2 + (\Omega_2 - \Omega_2''')\, y^2 = 0.$$

Weil $\Omega_2''' = \pm O_2$, so geht diese über in:

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 + O_2)\, x^2 + (\Omega_2 - O_2)\, y^2 = 0,$$

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 + (\Omega_2 - O_2)\, x^2 + (\Omega_2 + O_2)\, y^2 = 0.$$

Die Invarianten A und B nehmen nach Berücksichtigung von $\omega_3 = O_4 = 0$ die Werte an:

$$A = (\Omega_2{}^2 - O_2{}^2)^2 = 0,$$
$$B = (\Omega_2{}^2 - O_2{}^2)^3 = 0.$$

Beide Gleichungen liefern als Wurzeln:

$$\Omega_2 = \pm O_2.$$

Trägt man diesen Wert in Gleichung (2) und (3) ein, dann resultieren:

$$(4) \qquad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + 2O_2\, x^2 = 0, \\ (x^2 + y^2)^2 + (-2O_2)\, y^2 = 0. \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 + (-2O_2)\, x^2 = 0, \\ (x^2 + y^2)^2 + 2O_2\, y^2 = 0. \end{cases}$$

Nun läßt sich zeigen, daß von den Gleichungspaaren (4) und (5) jedesmal nur die Gleichungen mit $+O_2$ in Betracht kommen, sofern man von einer Kurvengleichung mit reellen Koeffizienten ausgegangen ist, was hier allgemein vorausgesetzt worden ist.

Nach der allgemeinen Kurventheorie ist der Anfangspunkt des Koordinatensystems dann eine Spitze, wenn erstens die Glieder nullter und erster Ordnung verschwinden und zweitens die Glieder zweiter Ordnung ein vollständiges Quadrat bilden.

Wendet man diesen Satz auf die hier vorliegende Kurvengleichung (1) an, so ergibt sich: Der Komplex der Glieder zweiter Dimension:

(6) $$(\Omega_2 + O_2)\,x^2 + (\Omega_2 - O_2)\,y^2,$$

(7) $$(\Omega_2 - O_2)\,x^2 + (\Omega_2 + O_2)\,y^2$$

kann nur dann ein vollständiges Quadrat bilden, wenn der Koeffizient eines Gliedes in (6) resp. (7) verschwindet. Das andere Glied muß dann als Quadrat einer reellen Größe stets positiv sein.

Erster Fall: Ausdruck (6).

In (6) kann nur dann ein Koeffizient verschwinden, wenn ist:

$$\Omega_2 = \pm O_2.$$

Man findet hier zugleich eine Bestätigung des Resultats, das mit Hilfe der Invarianten A und B gefunden war.

Bezeichnet man die Glieder zweiter Ordnung mit $\varphi_2(x, y)$, so ist entweder: $$\varphi_2(x, y) = 2\,O_2\,x^2$$

oder: $$\varphi_2(x, y) = +(-2\,O_2)\,y^2.$$

O_2 ist als absoluter Betrag positiv, ferner auch y^2, weil es sich hier nur um reelle Kurven handelt; mithin ist der Koeffizient von y^2 negativ. Da dieser in dem vorliegenden Falle das Quadrat einer Größe sein muß und als solches negativ ist, so folgt, daß diese Größe selbst imaginär ist. Dies widerspricht aber der Annahme reeller Koeffizienten, und die hier in Betracht kommende Lösung lautet daher:

$$\Omega_2 = +O_2$$

und die Gleichung der Kurve:

(8) $$(x^2 + y^2)^2 + 2\,O_2\,x^2 = 0.$$

Zweiter Fall: Ausdruck (7).

Als Lösung ergibt sich hier ebenfalls wieder

$$\Omega_2 = \pm O_2,$$

damit ein Koeffizient null wird. Ferner wird:

$$\varphi_2(x, y) = +(-2\,O_2)\,x^2,$$
$$\varphi_2(x, y) = +(2\,O_2)\,y^2.$$

Wendet man dieselbe Schlußweise wie oben an, so folgt als Resultat die Kurvengleichung:

(9) $$(x^2 + y^2)^2 + 2\,O_2\,y^2 = 0.$$

Die Gleichungen (8) und (9) können aber keine reelle Kurve darstellen, denn $(x^2+y^2)^2$ ist für reelle Werte stets positiv, ebenso x^2 respektive y^2. Da O_2 ein absoluter Betrag ist, so ist es selbstverständlich positiv. Man kommt also zu dem Ergebnis, daß die Summe von positiven reellen Größen gleich null sein soll. Dies ist aber nicht möglich außer $x=0$, $y=0$ und damit ist also die Behauptung dieses Abschnittes als richtig erwiesen.

§ 14.

Degenerierte bizirkulare Kurven vierter Ordnung.

Schon im Paragraphen 11 war einmal der Fall eingetreten, daß die Kurve in zwei konzentrische Kreise zerfiel. Man kann sich nun ganz allgemein fragen: Ist es nicht möglich, daß die Kurve in zwei Kreise degeneriert, die sich in allgemeiner Lage zueinander befinden? Wie dieser Abschnitt zeigen wird, ist dies sehr wohl möglich. Von dem Zerfallsprodukt kann man bereits sagen, daß die Kurvengleichung, welche jenes repräsentiert, das Symmetriekriterium erfüllen muß. Denn man kann das Koordinatensystem so wählen, daß die eine Achse die Zentrale ist und die andere an beliebiger Stelle hierzu senkrecht steht. In bezug auf ihre Zentrale sind zwei Kreise stets symmetrisch.

Welche Bedingung müssen die orthogonalen Invarianten erfüllen, damit der Zerfall der bizirkularen C_4 in zwei Kreise eintritt?

Mit Hilfe der Gleichung $g^4(\delta)=0$ (siehe § 9) wird es uns gelingen, diese Bedingung herzuleiten. Das Verschwinden der Diskriminante dieser Gleichung $g^4(\delta)=0$ war die Bedingung dafür, daß die bizirkulare Kurve einen Doppelpunkt besitzt. Ist die Doppelwurzel speziell der Wert

$$-\frac{B_{20}}{4}=-\frac{\Omega_2+\Omega_2'''}{4}$$

oder

$$-\frac{B_{02}}{4}=-\frac{\Omega_2-\Omega_2'''}{4},$$

so zeigt sich, daß dann die Kurve in zwei Kreise zerfällt, was nun im einzelnen zu untersuchen ist.

Wie schon erwähnt, sind die zerfallenen bizirkularen Kurven symmetrisch. Es genügt daher, wenn der Nachweis für eine Kurvengleichung geführt ist, die in bezug auf eine Achse, etwa die x-Achse, das Symmetriekriterium erfüllt.

Nach § 9 kann man die Gleichung $g^4(\delta)=0$ schreiben:

$$(1)\quad (O_4-4\delta^2)\left(\frac{B_{20}}{4}+\delta\right)\left(\frac{B_{02}}{4}+\delta\right)+B_{10}{}^2\left(\frac{B_{02}}{4}+\delta\right)+B_{01}{}^2\left(\frac{B_{20}}{4}+\delta\right)=0.$$

Nach obiger Annahme ist nun $B_{01}=0$ zu setzen. Die Gleichung geht dann über in die folgende:

$$(2)\quad \left[(O_4-4\delta^2)\left(\frac{B_{20}}{4}+\delta\right)-B_{10}{}^2\right]\left(\frac{B_{02}}{4}+\delta\right)=0.$$

Hieraus kann man die Tatsache folgern, daß für den Fall, wo die Kurven symmetrisch sind, $-\frac{B_{20}}{4}$ respektive $-\frac{B_{02}}{4}$ eine einfache Wurzel der Gleichung $g^4(\delta)=0$ ist. Damit nun $-\frac{B_{02}}{4}$ noch einmal eine Wurzel ist, folgt, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer für $\delta=-\frac{B_{02}}{4}$ verschwindet. Nach Potenzen der Variabeln δ geordnet, nimmt die eckige Klammer folgende Gestalt an:

$$(3)\qquad \delta^3+\delta^2\frac{B_{20}}{4}-\delta\frac{O_4}{4}+O_4\frac{B_{10}}{16}+\frac{B_{10}{}^2}{4}=0.$$

Nun ist:

$$\frac{B_{20}}{4}=\frac{\Omega_2+\Omega_2'''}{4}$$

$$B_{10}{}^2=\omega_3{}^2,$$

so daß resultiert:

$$(3a)\quad \delta^3+\frac{1}{4}(\Omega_2+\Omega_2''')\delta^2-\delta\cdot\frac{O_4}{4}-\frac{O_4(\Omega_2+\Omega_2''')}{16}+\frac{\omega_3{}^2}{4}=0.$$

Ist $-\frac{B_{02}}{4}$ Wurzel der Gleichung $f^3(\delta)=0$, dann kann man nach dem Fundamentalsatz der Algebra diese Tatsache so ausdrücken:

$$(4)\qquad \left(\delta+\frac{B_{02}}{4}\right)(\delta^2+a\delta+b)=0.$$

Die Gleichung (4) drückt dasselbe aus wie (3), also kann man a und b durch Koeffizientenvergleichung finden. Man erhält mithin:

$$\frac{1}{4}B_{20}=a+\frac{B_{02}}{4}$$

oder hieraus:

$$a=\frac{1}{4}(B_{20}-B_{02}),$$

ferner

$$-\frac{O_4}{4}=b+a\cdot\frac{B_{02}}{4},$$

$$-\frac{O_4}{4}=b+\frac{1}{16}B_{02}(B_{20}-B_{02}).$$

Daraus folgt: $$b = -\left(\frac{O_4}{4} + \frac{1}{16} B_{02}(B_{20} - B_{02})\right).$$

Schließlich kommt man auf die Gleichung:

$$-O_4 \cdot \frac{B_{20}}{16} + \frac{{B_{10}}^2}{4} = b \cdot \frac{B_{02}}{4}$$

oder: $$-O_4 \cdot \frac{B_{20}}{16} + \frac{{B_{10}}^2}{4} = -\frac{B_{02}}{16} O_4 - \frac{{B_{02}}^2}{64}(B_{20} - B_{02}).$$

Hieraus ergibt sich:

$${B_{10}}^2 = \frac{1}{4}\left(O_4 - \frac{{B_{02}}^2}{4}\right)(B_{20} - B_{02}).$$

Setzt man hierin für B_{20}, B_{02}, B_{10} die Werte ein, so folgt:

(5) $$\omega_3{}^2 = \frac{1}{2}\Omega_2''' \left(O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2\right).$$

Daß diese Bedingung, der die Invarianten genügen sollen, wirklich die Behauptung erfüllt, soll jetzt nachgewiesen werden.

Soll die bizirkulare Kurve aus zwei Kreisen bestehen, dann muß sich ihre Gleichung darstellen lassen als Produkt zweier Kreise, etwa:

$$K_1 \cdot K_2 = 0.$$

Um nun die Rechnungen etwas abzukürzen, sollen die Gleichungen der beiden Kreise nicht bezogen werden auf ein beliebig in der Ebene liegendes Koordinatensystem, sondern auf ein Koordinatensystem, welches die Zentrale als x-Achse (also ist die x-Achse Symmetrieachse) und den Mittelpunkt des einen Kreises als Anfangspunkt hat. Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern sie drückt nur aus, daß die Drehung des Koordinatensystems, um auf die Normalform zu kommen, bereits vollzogen ist, und daß nur noch eine Verschiebung des Anfangspunkts in den Fundamentalpunkt zu leisten ist, damit man die wirkliche Normalform der bizirkularen Kurven erhält.

Nach obiger Annahme haben die Gleichungen der Kreise also die Form:

$$K_1 = (x^2 + y^2) + 2\delta = 0,$$
$$K_2 = (x^2 + y^2) - 2\alpha x + 2\delta_1 = 0.$$

Es wird mithin

(6) $$h^4(x, y) = K_1 \cdot K_2 = (x^2 + y^2)^2 - 2\alpha x(x^2 + y^2) + 2(\delta + \delta_1)(x^2 + y^2) - 4\alpha\delta x + 4\delta\delta_1 = 0.$$

Führt man eine Verschiebungstransformation durch, indem man $x + \frac{\alpha}{2}$ für x setzt, dann resultiert die Gleichung:

(7) $$h^4(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + \left[2(\delta + \delta_1) - \frac{3}{2}\alpha^2\right] x^2 + \left[2(\delta + \delta_1) - \frac{\alpha^2}{2}\right] y^2$$
$$+ 4\left[-\frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha}{2}(\delta + \delta_1) - \alpha\delta\right] x + \left[(\delta + \delta_1)\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{16}\alpha^4 - 2\alpha^2\delta + 4\delta\delta_1\right] = 0.$$

Es wird also, wenn man Gleichung (7) mit Gleichung (8) (siehe § 7) vergleicht:

$$\Omega_2 + \Omega_2''' = 2(\delta + \delta_1) - \frac{3}{2}\alpha^2,$$

$$\Omega_2 - \Omega_2''' = 2(\delta + \delta_1) - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\omega^3 = -\frac{\alpha^3}{4} + \frac{\alpha}{2}(\delta + \delta_1) - \alpha\delta,$$

$$O_4 = (\delta + \delta_1)\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{16}\alpha^3 - 2\alpha^2\delta + 4\delta\delta_1.$$

Es bleibt nun noch die Bedingung (5) nachzuweisen. Bildet man ω_3^2, dann erhält man den Ausdruck:

$$\omega_3^2 = \frac{\alpha^6}{16} + \frac{\alpha^2}{4}(\delta + \delta_1)^2 + \alpha^2\delta^2 - \frac{1}{4}\alpha^4(\delta + \delta_1) + \frac{1}{2}\alpha^4\delta - \alpha^2\delta(\delta + \delta_1).$$

Ferner wird:

$$\left(O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2\right)\Omega_2''' = \left[(\delta + \delta_1)\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{16}\alpha^4 - 2\alpha^2\delta + 4\delta\delta_1 - \frac{1}{4}\left((\delta + \delta_1)^2 \cdot 4 - 2(\delta + \delta_1)\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{16}\right)\right] \cdot \left(-\frac{\alpha^2}{4}\right).$$

Diese Ausdrücke lassen sich schreiben:

$$\omega_3^2 = \frac{\alpha^2}{4}\left[\frac{\alpha^4}{4} + (\delta + \delta_1)^2 - 4\delta^2 - \alpha^2(\delta + \delta_1) + 2\delta\alpha^2 - 4\delta(\delta + \delta_1)\right]$$

$$\left[O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2\right]\Omega_2''' = \frac{\alpha^2}{4}\left[\frac{\alpha^4}{4} + (\delta + \delta_1)^2 - \alpha^2(\delta + \delta_1) + 2\delta\alpha^2 - 4\delta\delta_1\right].$$

Da die rechten Seiten übereinstimmen, so ergibt sich in der Tat die Relation (5) als richtig.

Aus dieser Gleichung (5) kann man noch folgende Schlüsse ziehen:

Das Verschwinden von ω_3 ist die Bedingung dafür, daß die Kurve einen Mittelpunkt hat (siehe § 6). Der obige Ausdruck für ω_3 kann nun einmal verschwinden, wenn $\Omega_2''' = 0$ ist. Auf diesen Fall war man schon im § 11 gekommen. Es wurde damals bereits erwähnt, daß wenn $\Omega_2''' = \omega_3 = 0$ ist, die Kurve in zwei (konzentrische) Kreise zerfällt. Den Zerfall in zwei Kreise findet man schon durch Gleichung (5) bestätigt. Daß diese speziell konzentrisch sind, wird man einsehen, wenn man die Invarianten ausdrückt durch die Größen δ, δ_1, α; was in einem besonderen Abschnitt erledigt werden wird.

Zweitens kann ω_3 zu null werden, wenn der Klammerausdruck verschwindet. Man kann bereits vermuten, daß diese Mittelpunktskurve von zwei Kreisen gebildet wird, die gleiche im allgemeinen von Null verschiedene Radien haben.

Entsprechend diesen beiden Gruppen von Mittelpunktskurven, sollen überhaupt die degenerierten Kreiskurven in zwei Abschnitten behandelt werden, je nachdem die Mittelpunkte der beiden Kreise sich in beliebiger Lage zueinander befinden oder zusammenfallen.

I. Die Kreise befinden sich in allgemeiner Lage.

Kriterium: $\omega_3^2 = \frac{1}{2}\,\Omega_2'''\left(O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2\right)$.

A. Die Mittelpunktskurven dieser Art.

Kriterium: $O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2 = 0$.

Da über den allgemeinen Fall der Degeneration in zwei Kreise weiter nichts zu sagen ist, soll jetzt übergegangen werden zu den Mittelpunktskurven in allgemeiner Lage und gezeigt werden, daß in der Tat die Relation

$$O_4 - \tfrac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2 = 0$$

erfüllt ist, wenn die Radien der beiden Kreise gleich werden. Sind die Gleichungen der beiden Kreise:

$$K_1 = (x^2 + y^2)^2 + 2\delta = 0,$$
$$K_2 = (x^2 + y^2)^2 - 2\alpha x + 2\delta_1 = 0,$$

so läßt sich die Bedingung für die Gleichheit der beiden Radien schreiben:

$$-2\delta = -2\delta_1 + \alpha^2$$

oder auch

$$\delta_1 - \delta = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Diese Gleichung zeigt sogleich, daß nur die Differenz der Quadrate der beiden Radien in Betracht kommt. Nun war:

$$O_4 = (\delta + \delta_1)\,\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{16}\,\alpha^4 - 2\alpha^2\delta + 4\,\delta\delta_1,$$

$$\Omega_2 = 2\,(\delta + \delta_1) - \alpha^2,$$

$$\Omega_2''' = -\frac{\alpha^2}{2},$$

$$\Omega_2 - \Omega_2''' = 2\,(\delta + \delta_1) - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Es wird also:

$$O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2 = (\delta + \delta_1)\,\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{16}\,\alpha^4 - 2\alpha^2\delta + 4\,\delta\delta_1 - (\delta + \delta_1)^2 + \frac{\alpha^2(\delta + \delta_1)}{2} - \frac{\alpha^4}{16}.$$

Setzt man hierin $\delta = \delta_1 - \frac{\alpha^2}{2}$ ein, dann resultiert, nachdem man dem Ausdruck noch die Form gegeben hat:

$$(8) \qquad (\delta_1 - \delta)\,\alpha^2 - \frac{1}{4}\,\alpha^4 - (\delta_1 - \delta)^2,$$

in der Tat

$$O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2 = \frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} = 0.$$

Daß die Größe $(\delta_1 - \delta) = \frac{a^2}{2}$ die einzige Lösung der Gleichung:

$$(\delta_1 - \delta)\, a^2 - \frac{1}{4}\, a^4 - (\delta_1 - \delta)^2 = 0$$

ist, ergibt unmittelbar deren Auflösung nach $(\delta_1 - \delta)$. Denn es kommt:

$$(\delta_1 - \delta)_{1,2} = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4}}$$
$$= \frac{a^2}{2}.$$

$\frac{a^2}{2}$ ist also die einzige (Doppel-)Wurzel der Gleichung, die sich durch Nullsetzen von (8) ergibt. Das gefundene Resultat lautet also:

> Ist $\omega_3^2 = \frac{1}{2}(O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2)\Omega_2'''$ derart gleich null, daß $O_4 = \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2$ und $\Omega_2''' \neq 0$, so werden die Radien der beiden Kreise einander gleich.

Um gleich die Mittelpunktskurven zu erledigen, soll in Anschluß hieran auch der Fall erwähnt werden, daß die Radien beide zu null werden. Die Bedingungen hierfür sind:

$$1)\ \delta = 0, \qquad 2)\ \delta_1 = \frac{a^2}{2}.$$

Ferner wird, wie man sieht, $\Omega_2 = 0$. Da zwei Nullkreise ebenfalls einen Mittelpunkt haben, so muß natürlich auch ω_3 verschwinden und zwar derart, daß:

$$O_4 - \tfrac{1}{4}\Omega_2'''^2 = 0$$

ist. Das gefundene Resultat läßt sich kurz so aussprechen:

> Ist $\omega_3 = 0$, derart, daß $O_4 - \frac{1}{4}(\Omega_2 - \Omega_2''')^2 = 0$, und ferner $\Omega_2 = 0$, dann zerfällt die Kurve in zwei Nullkreise.

Daß in der Tat Ω_2 nur null werden kann für $\delta = 0$ und $\delta_1 = \frac{a^2}{2}$, sofern gleichzeitig ω_3 verschwinden soll, sieht man leicht ein, wenn man den Ausdruck für ω_3 hinschreibt. Denn nimmt man $\delta \neq 0$, $\delta_1 \neq \frac{a^2}{2}$ an, so ergibt sich aus $\Omega_2 = 2(\delta + \delta_1) - a^2 = 0$

$$\delta_1 = \frac{a^2}{2} - \delta.$$

Setzt man dies ein in ω_3, dann resultiert:

$$\omega_3 = -a\delta.$$

Nun ist α für die ganze Gruppe von Kurven dieses Abschnittes von Null verschieden. Damit also ω_3 verschwindet, folgt also $\delta = 0$. Ist aber $\delta = 0$, dann ergibt sich aus $\Omega_2 = 0$:

$$\delta_1 = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Damit ist die Behauptung erwiesen.

Anmerkung. Der Fall $\Omega_2 = 0$, ohne daß $\delta = 0$, $\delta_1 = \frac{\alpha^2}{2}$ ist, führt auf eine in zwei Kreise zerfallene bizirkulare Kurve, die zu der Gattung von Kurven gehört, wo die erste respektive zweite Polare des Fundamentalpunktes eine gleichseitige Hyperbel ist (siehe § 5). Der eben behandelte speziellere Fall gehört natürlich auch zu dieser Gattung von Kurven.

B. Zwei Kreise, von denen einer ein Nullkreis ist.

Es wird sich darum handeln, die Bedingung herzuleiten, der die Invarianten genügen müssen, damit das Nullwerden eines der Kreisradien eintritt. Legt man die hier angenommenen Kreisgleichungen zugrunde, so tritt dies ein, wenn:

$$1)\ \delta = 0 \quad \text{oder} \quad 2)\ \delta_1 = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Man gewinnt das Kriterium, wenn man δ und δ_1 durch die orthogonalen Invarianten ausdrückt und $\delta = 0$ resp. $\delta_1 = \frac{\alpha^2}{2}$ setzt. Als Ausgangspunkt werden die Gleichungen dienen:

$$(9) \qquad \Omega_2 + \Omega_2''' = 2\,(\delta + \delta_1) - \frac{3}{2}\alpha^2,$$

$$(10) \qquad \Omega_2 - \Omega_2''' = 2\,(\delta + \delta_1) - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$(11) \qquad \Omega_2 = 2\,(\delta + \delta_1) - \alpha^2,$$

$$(12) \qquad \Omega_2''' = -\frac{\alpha^2}{2}.$$

Aus (10) folgt unter Berücksichtigung von (12):

$$(13) \qquad \delta + \delta_1 = \frac{1}{2}(\Omega_2 - 2\,\Omega_2'''),$$

Da ω_3 den Wert hat:

$$\omega_3 = \frac{\alpha}{2} \cdot \delta + \frac{\alpha}{2}\,\delta_1 - \frac{\alpha^3}{4} - \alpha\delta$$

$$= \frac{\alpha}{2}\,(\delta + \delta_1) - \frac{\alpha^3}{4},$$

so ergibt sich hieraus, wenn man ebenfalls Gleichung (12) berücksichtigt:

$$\delta_1 - \delta = \frac{2\,\omega_3}{\sqrt{-2\,\Omega_2'''}} - \Omega_2''' . \tag{14}$$

Aus (13) und (14) ergibt sich:

$$\delta = \frac{\Omega_2}{4} - \frac{\omega_3}{\sqrt{-2\,\Omega_2'''}}, \tag{15}$$

$$\delta_1 = \frac{\omega_3}{\sqrt{-2\,\Omega_2'''}} - 2\,\Omega_2''' + \frac{\Omega_2}{2} . \tag{16}$$

Nun hat man zu unterscheiden:

1) $\delta = 0$.

Die Gleichung (15) geht dann über in:

$$\omega_3 = \frac{\Omega_2}{4}\sqrt{-2\,\Omega_2'''} .$$

2) $\delta_1 = \frac{a^2}{2}$.

Es folgt dann aus (16):

$$\omega_3 = -\frac{\Omega_2}{4}\sqrt{-2\,\Omega_2'''} .$$

Das Resultat kann man folgendermaßen aussprechen:

Der Radius eines der beiden Kreise, die zusammen die degenerierte bizirkulare Kurve bilden, wird null, wenn:

$$\omega_3 = \pm\sqrt{-2\,\Omega_2'''}\cdot\frac{\Omega_2}{4} .$$

Auch dieses Ergebnis zeigt wieder, daß, wenn Ω_2 gleich null wird, zugleich ω_3 verschwindet. Nun ist, da ja bereits ein Nullkreis existiert, $\Omega_2 = 2\,\delta$ oder $\Omega_2 = 2\,\delta_1 - a^2$. Es bedeutet also $\Omega_2 = 0$ entweder

1) $\delta = 0$

oder

2) $\delta_1 = \frac{a^2}{2}$.

Da nun in jedem dieser beiden Fälle der andere Radius von vornherein null ist, so hat man hierin auch wieder eine Bestätigung des am Ende des Abschnittes A. gefundenen Resultates.

II. Zwei konzentrische Kreise.

Diese Gruppe von degenerierten Kurven läßt sich charakterisieren durch $\Omega_2''' = 0$. Aus der Relation der Invarianten (5) folgt, daß dann auch ω_3 verschwindet. Nun hat Ω_2''' den Wert $-\frac{a^2}{2}$. Soll Ω_2''' also

null sein, dann muß a gleich null sein. Unter dieser Voraussetzung nehmen die Gleichungen der Kreise folgende Form an:

$$K_1 = x^2 + y^2 + 2\delta = 0,$$
$$K_2 = x^2 + y^2 + 2\delta_1 = 0.$$

Durch diese Gleichungen werden also zwei konzentrische Kreise dargestellt, die in bezug auf zwei senkrechte Achsen stets Symmetrie besitzen.

Die Invarianten Ω_2, O_4 gewinnen unter der Annahme $\Omega_2''' = 0$ folgende einfache Gestalt:

$$\Omega_2 = 2(\delta + \delta_1),$$
$$O_4 = 4\delta\delta_1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$2\delta = -\frac{\Omega_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_2^2 - 4O_4},$$

$$2\delta_1 = -\frac{\Omega_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_2^2 - 4O_4}.$$

Wie man sieht, sind dies die Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$z^2 + \Omega_2 z + O_4 = 0.$$

Diese kann man auch, weil z^2 als Quadrat eines Kreisradius gleich $x^2 + y^2$ ist, in folgender Form schreiben:

$$(x^2 + y^2)^2 + \Omega_2(x^2 + y^2) + O_4 = 0.$$

Umgekehrt stellt also eine solche Gleichung stets ein Paar konzentrische Kreise dar, weil man eben (solange wenigstens Ω_2 und O_4 von null verschieden sind) stets erhält:

$$(x^2 + y^2)_{1,2} = z_{1,2} = -\frac{\Omega_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_2^2 - 4O_4}.$$

Damit überhaupt reelle Lösungen auftreten können, muß die Diskriminante größer als null sein. Setzt man dies voraus, so kann man noch folgende Unterscheidungen machen:

1) $\Omega_2 > 0$.

In diesem Falle ist höchstens ein Kreis reell, und zwar wenn:

$$\Omega_2 < \sqrt{\Omega_2^2 - 4O_4}.$$

2) $\Omega_2 < 0$.

Unter dieser Voraussetzung wird stets ein Kreis reell. Es ist dies auch mit dem zweiten der Fall, wenn:

$$-\Omega_2 > \sqrt{\Omega_2^2 - 4O_4}.$$

Als weitere Sonderfälle können noch auftreten:

a) $\Omega_2 = 0$.

Dann kommt:

$$(x^2 + y^2)^2 + O_4 = 0.$$

Als Lösung ergibt sich:

$$(x^2 + y^2)_{1,2} = z_{1,2} = \sqrt{-O_4}.$$

Hierdurch wird ein doppelt zählender Kreis repräsentiert, der reell ist, wenn $O_4 < 0$, und im anderen Falle imaginär ist.

b) $O_4 = 0$.

Man erhält dann als Wurzeln:

$$z_1 = -\Omega_2,$$
$$z_2 = 0.$$

Die Gleichung geht über in:

$$(x^2 + y^2)\ (x^2 + y^2 + \Omega_2) = 0.$$

Geometrisch heißt dies: Die Kurve besteht aus einem Kreise mit dem Radius $\sqrt{-\Omega_2}$, der für $\Omega_2 < 0$ reell ist, und aus einem Nullkreise durch den Fundamentalpunkt.

c) $\Omega_2 = O_4 = 0$.

In diesem Falle erhält man ein durch die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 = 0$$

dargestelltes und doppelt zu zählendes Nullstrahlenpaar.

Damit sind alle Fälle von in Kreise degenerierten bizirkularen Kurven vierter Ordnung, die auftreten können, erledigt.

Am Schlusse meiner Arbeit erlaube ich mir meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. Gutzmer meinen verbindlichsten Dank für die freundliche Anregung zu der vorstehenden Untersuchung und die liebenswürdige Unterstützung bei ihrer Ausführung auszusprechen.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.

Herleitung der orthogonalen Invarianten der bizirkularen Kurven vierter Ordnung.

Seite

§ 1. Einleitung 5

§ 2. Allgemeine Bemerkungen über die Invarianten 8

§ 3. Die Asymptoten der bizirkularen C_4 und die sich daraus ergebenden orthogonalen Invarianten O_1', O_1'', O_2, Ω_2', Ω_2'' 9

§ 4. Der Fundamentalpunkt $(-a_{30}, -a_{03})$ und die orthogonale Invariante O_4 15

§ 5. Die kovarianten Kegelschnitte des Fundamentalpunktes in bezug auf die Grundkurve und ihre orthogonalen Invarianten . . . 17

§ 6. Die orthogonale Mittelpunktsinvariante $\omega_3 = \sqrt{A_{10}^2 + A_{01}^2}$ . . . 21

§ 7. Normalformen der Kurvengleichung 23

§ 8. Die allgemeinen Invarianten A und B 26

§ 9. Die „Doppelpunktsinvarianten“ 27

Kapitel II.

Klassifikation der bizirkularen Kurven vierter Ordnung mit Hilfe der gefundenen Invarianten.

§ 10. Einleitende Betrachtungen 31

§ 11. Allgemeine bizirkulare Kurven vierter Ordnung ohne Doppelpunkt im Endlichen 32

§ 12. Bizirkulare Kurven vierter Ordnung mit Doppelpunkt im Endlichen 37

§ 13. Bizirkulare Kurven vierter Ordnung mit Spitze im Endlichen . . 42

§ 14. Degenerierte bizirkulare Kurven vierter Ordnung 49

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Hermann Richard Otto Lüders, evangelischer Konfession, am 5. Mai 1887 zu Elbeu, Kreis Wolmirstedt, Provinz Sachsen, als Sohn des Landwirts Otto Lüders und seiner Ehefrau Ida geb. Böbe. Ich bin preußischer Staatsangehöriger. Meinen ersten Schulunterricht genoß ich von Ostern 1893 bis Ostern 1897 in der Volksschule zu Elbeu. Von Ostern 1897 ab besuchte ich das Realgymnasium zu Magdeburg, das ich Ostern 1906 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um in Halle Mathematik und Physik zu studieren. Am 26. Juli 1910 bestand ich das Examen rigorosum. Während meines Studiums hörte ich bei den folgenden Herren Dozenten:

Abert, Buchholz, Cantor, Dorn, Ebbinghaus †, Eberhard, Fries, Goldschmidt, Grenacher, Gutzmer, Holdefleiß, Klebs, Langheineken, Leser, Loofs, Martiny, Menzer, Meumann, K. Schmidt, H. Schwarz, Taschenberg, Wangerin, Wüst.

Alle meine verehrten Lehrer mögen meines dauernden Dankes versichert sein.